

**TOPOLOGISCHE RIESZ'SCHE RÄUME
UND IHRE MASSTHEORETISCHE DARSTELLUNG**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Rudolf Matzka
eingereicht am 25. Mai 1976

1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**TOPOLOGISCHE RIESZ'SCHE RÄUME
UND IHRE MASSTHEORETISCHE DARSTELLUNG**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Rudolf Matzka

eingereicht am 25. Mai 1976



1. Berichterstatter: Professor Dr. W. Hackenbroch

2. Berichterstatter: Professor Dr. W. Roelcke

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Februar 1977

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
§ 0. Vorbereitungen	7
§ 1. Boole'sche Algebren und Riesz'sche Räume	16
A. Riesz'sche Räume über Boole'schen Algebren	16
B. Darstellungstheorie	24
§ 2. Topologien auf Boole'schen Algebren und Riesz'schen Räumen	28
A. Übertragungsmechanismus	28
B. Anwendung des Übertragungsmechanismus	52
§ 3. Inhalte und lokal-konkave Topologien	69
A. Inhaltserzeugte Topologien auf Boole'schen Algebren	69
B. Riesz'sche Räume mit lokal-konkaven Topologien und ihre maßtheoretische Darstellung	81
§ 4. Beispiele und Ergänzungen	97
A. Riesz'sche Räume ohne die Diagonaleigenschaft	97
B. Inhalte auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und Solovay's Modell	102
Stichwortverzeichnis	105
Symbolverzeichnis	108
Literaturverzeichnis	110

Zusammenfassung

In der Maßtheorie hat man es häufig mit Teilräumen des Raumes $L^0(\mu)$ zu tun, wobei μ ein Maß und $L^0(\mu)$ der Raum aller μ -Äquivalenzklassen μ -meßbarer reeller Funktionen ist. Solche Räume sind in der Regel Riesz'sche Räume, und es hat sich gezeigt, daß Riesz-theoretische Methoden oft tiefliegende Einsichten in maßtheoretische Sachverhalte ermöglichen. In diesem Zusammenhang ist die folgende Frage von großem Interesse: Welche Eigenschaften muß ein Riesz'scher Raum haben, damit es ein Maß μ gibt (gewisse triviale Maße ausgenommen), so daß er Riesz-isomorph in $L^0(\mu)$ eingebettet werden kann? Diese Frage war der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit, und sie wird mit Satz 3.26 für eine große Klasse von Fällen beantwortet.

Für gewisse Teilräume von $L^0(\mu)$ sind Riesz-theoretische interne Charakterisierungen seit längerem bekannt. Kakutani hat 1941 eine Charakterisierung der Räume $L^1(\mu)$ mit beliebigem Maß μ angegeben [KAK]; diese läßt sich durch einfache Modifikationen zu einer Charakterisierung der Räume $L^p(\mu)$ ($0 < p < \infty$) erweitern (vgl. [VO]). Von Fremlin wurde 1966, unter Benutzung des Dualraums aller ordnungs-stetigen Integrale, eine Charakterisierung der Köthe-Funktionenräume über semi-finiten, lokalisierbaren Maßen angegeben [FR2]. Eine verallgemeinerte Version dieses Dualraumes wurde 1969 von Masterson zu einer Charakterisierung der Räume $L^0(\mu)$ über semi-finiten, lokalisierbaren Maßen benutzt [MAS]. In der vorliegenden Arbeit benutzen wir Riesz-theoretisch-topologi-

sche Methoden und erhalten eine Charakterisierung aller Ideale (und sogar etwas allgemeinerer Teilräume) in $L^0(\mu)$ für semi-finite, lokalisierbare Maße μ .

Bei der Behandlung dieses Problems haben wir es zum einen Teil mit rein Riesz-theoretischen Darstellungsfragen zu tun; diese sind der Gegenstand von § 1. Zum anderen Teil haben wir es mit Topologien auf Riesz'schen Räumen und Boole'schen Algebren zu tun; diese Untersuchungen werden in den §§ 2 und 3 durchgeführt. Dabei beschränken wir uns keineswegs auf solche Überlegungen, die für den Beweis unseres Hauptresultats 3.26 benötigt werden. Der § 4 hat ergänzenden Charakter.

In § 0 fixieren wir unsere Terminologie und stellen die (für uns) wichtigsten Begriffe aus den Theorien der Boole'schen Algebren und der Riesz'schen Räume bereit.

Jedem Riesz'schen Raum E ist die Boole'sche Algebra A seiner Projektionsbänder zugeordnet; umgekehrt kann man jeder Boole'schen Algebra in natürlicher Weise gewisse Riesz'sche Räume zuordnen. Wir geben in § 1 die diesbezüglichen Konstruktionen an und zeigen, in welchem Sinne sie zu der erstgenannten Zuordnung invers sind (1.5, 1.6, 1.8). Dabei benutzen wir zwei Sätze aus der Darstellungstheorie für Riesz'sche Räume (Ogasawara-Maeda und Nakano, vgl. [LZ], Thm. 50.8 und Thm. 51.2), in welchen Räume stetiger Funktionen zur Darstellung benutzt werden. Wir zeigen dann, daß diese Räume in wichtigen Fällen auch als Räume von Äquiva-

lenzklassen meßbarer Funktionen interpretiert werden können (1.16, 1.18). Damit ist der gemeinsame Riesz-theoretische Hintergrund aller obengenannter Charakterisierungssätze offengelegt und zugleich die Grundlage für den Beweis unseres Satzes 3.26 gegeben.

Topologien auf Riesz'schen Räumen werden u.a. von Fremlin untersucht ([FR1]), Topologien auf Boole'schen Algebren werden u.a. von Wladimirow untersucht ([WL1]). Wir bringen in § 2 diese beiden Theorien in Zusammenhang. Dazu betrachten wir, in Abschnitt A., einen Riesz'schen Raum E zusammen mit der Boole'schen Algebra A seiner Projektionsbänder, und wählen die Voraussetzungen so, daß es eine natürliche Verbands-Einbettung δ von A in den positiven Kegel von E gibt. Ausgehend von einer Topologie T auf E zeigen wir, wie sich gewisse Eigenschaften von T in den Eigenschaften ihrer Initialtopologie bezüglich δ widerspiegeln (2.10). Umgekehrt, ausgehend von einer Topologie τ auf A , betrachten wir die Familie $\mathcal{T}(\tau)$ derjenigen Topologien auf E , die gewissen Verträglichkeitsbedingungen genügen und deren Initialtopologie bezüglich δ gleich τ ist. Wir geben Bedingungen dafür an, daß $\mathcal{T}(\tau)$ nicht leer ist (2.11), untersuchen die innere Struktur der Familie $\mathcal{T}(\tau)$ und zeigen, wie gewisse Eigenschaften von τ sich in den Eigenschaften der Topologien aus $\mathcal{T}(\tau)$ widerspiegeln (2.16).

In Abschnitt B. benutzen wir diese Ergebnisse, um einige Sätze, welche für Topologische Riesz'sche Räume zur Verfügung stehen, auf Boole'sche Algebren zu übertragen. Unter

anderem erhalten wir eine einfache Charakterisierung derjenigen Topologien τ auf einer Boole'schen Algebra A , welche durch die Familie aller τ -stetigen Sub-Inhalte erzeugt werden (2.26). Wir betrachten sodann eine Klasse von Topologien auf Riesz'schen Räumen bzw. Boole'schen Algebren, welche mit der Riesz'schen bzw. Boole'schen Struktur besonders gut verträglich sind, die "L-Topologien". Wir erhalten einen neuen Beweis für die (bekannte) Tatsache, daß es auf einer vollständigen Boole'schen Algebra höchstens eine L-Topologie gibt (2.38) und zeigen, daß für eine große Klasse von Riesz'schen Räumen E (welche die Dedekind-vollständigen umfaßt) die Existenz einer L-Topologie auf E zur Existenz einer L-Topologie auf der Boole'schen Algebra A der Projektionsbänder von E äquivalent ist (2.42). Daneben führen wir die Theorie der Topologien auf Boole'schen Algebren eigenständig weiter und erhalten eine interessante Aussage über die Ordnungstopologie τ_0 auf einer Boole'schen σ -Algebra A : ist die symmetrische Differenz eine τ_0 -stetige Operation, so wird τ_0 durch die Familie aller τ_0 -stetigen Sub-Inhalte erzeugt (2.31).

Ist nun τ eine Topologie auf der Boole'schen Algebra A , welche durch die Familie aller τ -stetigen Sub-Inhalte erzeugt wird, so stellt sich die Frage: unter welchen Voraussetzungen wird τ durch die Familie aller τ -stetigen Inhalte erzeugt? Dieser Frage wenden wir uns in § 3 zu. In Abschnitt A. zeigen wir: dies ist genau dann der Fall, wenn τ gröber als die von allen Inhalten erzeugte Topologie ist (3.8). Eine (triviale) notwendige Bedingung hierfür ist, daß jede dis-

junkte Folge in A gegen das Nullelement konvergiert; die Frage, ob sie auch hinreichend ist, erweist sich als äquivalent zu einem von Maharam 1947 aufgeworfenen, bis heute ungelösten Problem ([MAH]), betreffend die Existenz eines strikt positiven endlichen Maßes auf einer Boole'schen σ -Algebra (3.9).

Das gleiche Problem erscheint in neuem Licht, wenn wir Riesz'sche Räume in die Betrachtung mit einbeziehen; dies tun wir in Abschnitt B.. Wir führen den Begriff einer "lokal-konkaven" Topologie auf einem Riesz'schen Raum ein, der für das weitere von entscheidender Bedeutung ist. Der Ursprung dieses Begriffs ist einerseits in einer von H. von Weizsäcker bewiesenen Aussage über den Raum $L^0(\mu)$ zu sehen ([WE]), andererseits im Beweis der von Kelley angegebenen Charakterisierung der Boole'schen Algebren mit strikt positiven Inhalten ([KE]). Mit Hilfe dieses Begriffs erhalten wir zunächst eine neue Charakterisierung derjenigen Topologien auf einem Riesz'schen Raum, welche durch eine Familie von additiven Riesz-Seminormen erzeugt werden (3.18). Sodann ziehen wir den in § 2A. bereitgestellten Übertragungsmechanismus für Topologien hinzu und erhalten eine neue Bedingung dafür, daß eine Topologie auf einer Boole'schen Algebra durch die Familie ihrer stetigen Inhalte erzeugt wird (3.20). Wir spezialisieren uns auf die in § 2B. untersuchten L-Topologien und erhalten folgendes Ergebnis: Gehört der Riesz'sche Raum E einer gewissen Klasse an (welche die Dedekind-vollständigen Räume umfaßt), so gibt es eine lokal-konkave L-Topologie

auf E genau dann, wenn es auf der Boole'schen Algebra A der Projektionsbänder von E ein strikt positives, semi-finites Maß gibt (3.21). Wir kombinieren dieses Ergebnis mit den in

1 bereitgestellten Darstellungssätzen und erhalten schnell den eingangs angekündigten Satz 3.26.

In 4 geben wir einige Resultate an, die als Nebenprodukte der Beschäftigung mit dem obengenannten Problemkreis entstanden sind. Wir ziehen zwei Folgerungen aus der "Diagonaleigenschaft" für Riesz'sche Räume (4.2, 4.6) und erhalten damit Beispiele für Riesz'sche Räume, welche diese Eigenschaft nicht besitzen (4.3, 4.8). Für gewisse Räume dieser Art zeigen wir, daß ihre Ordnungstopologien nicht metrisierbar sind (4.5). Schließlich machen wir eine Bemerkung über eine maßtheoretische Konsequenz eines mengentheoretischen Axiomensystems, dessen relative Konsistenz von Solovay ($[SO]$) untersucht wurde (4.10).

Ich möchte an dieser Stelle all denen danken, die das Zustandekommen dieser Arbeit ermöglicht haben. Insbesondere Herrn Dr. H. von Weizsäcker für zahlreiche Anregungen, Herrn Prof. W. Hackenbroch und Herrn Prof. W. Roelcke für einige Ratschläge bei der endgültigen Formulierung, sowie Herrn Prof. H. Richter für seine freundliche Unterstützung.

§ 0. Vorbereitungen

0.1 Allgemeines

In dieser Arbeit legen wir die allgemein übliche Zermelo-Fraenkel'sche Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZfC) zugrunde; Abweichungen hiervon werden ausdrücklich erwähnt. Wir verwenden die üblichen mengentheoretischen Bezeichnungen, insbesondere:

$\mathcal{P}(A)$: Potenzmenge der Menge A

$c(A)$: Komplement der Menge A, relativ zur jeweils zugrunde liegenden Menge

$B \setminus A$: Komplement der Menge A relativ zur Menge B

χ_A : Indikatorfunktion der Menge A, definiert auf der jeweils zugrunde liegenden Menge

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen (ohne die Zahl 0); mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, versehen mit der natürlichen Topologie und der natürlichen Ordnung; mit $\tilde{\mathbb{R}}$ die Menge $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, versehen mit der Kompaktifizierungstopologie und der natürlichen Ordnung.

Eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ wird durch das Symbol $(f_n)_n$ und die Angabe der Zielmenge A bezeichnet.

Ist A eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so bezeichnen wir mit $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A.

Alle vorkommenden linearen Räume sind lineare Räume über dem Körper $\mathbb{R}$.

Ist A eine Teilmenge eines linearen Raumes, so bezeichnen wir mit $\text{co}(A)$ die konvexe Hülle von A.

0.2 Verbände

Es sei V ein Verband mit der Ordnungsrelation " $\leq$ " und den Verbandsoperationen " $\wedge$ " (Infimum) und " $\vee$ " (Supremum). Ist $A \subset V$, $x \in V$, und ist x die kleinste obere Schranke von A , so schreiben wir $x = \sup_{(V)} A$ oder $x = \sup A$; dual dazu ist $x = \inf A$ erklärt. Für $A, B \subset V$, $x \in V$ definieren wir $A \vee B := \{a \vee b : a \in A, b \in B\}$, $A \vee x := A \vee \{x\}$; dual sind $A \wedge B$ und $A \wedge x$ erklärt. Für $a, b \in V$ setzen wir $[a, b] := \{x \in V : a \leq x \leq b\}$, sowie $[a, \infty] := \{x \in V : a \leq x\}$ und $[-\infty, b] := \{x \in V : x \leq b\}$. Ist $\emptyset \neq A \subset V$ und ist A nach oben gerichtet, so schreiben wir $A \uparrow$, gilt außerdem $x = \sup A$, so schreiben wir $A \uparrow x$; dual sind $A \downarrow$ und $A \downarrow x$ erklärt. Ist $(x_n)_n$ eine aufsteigende Folge in V , so schreiben wir $x_n \uparrow_n$ oder $x_n \uparrow$, gilt außerdem $x = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, so schreiben wir $x_n \uparrow x$; dual sind $x_n \downarrow$ und $x_n \downarrow x$ erklärt. Ist $A \uparrow \subset V$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(A \uparrow)$ den Filter auf V , der von der Filterbasis $\{A \cap [a, \infty] : a \in A\}$ erzeugt wird; dual ist $\mathcal{F}(A \downarrow)$ erklärt.

Sind $A, B \subset V$, und gibt es zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $a \leq b$, so sagen wir, B sei $\uparrow$ -konfimal zu A ; dual: $\downarrow$ -konfimal. $A \subset V$ heißt Teilverband, wenn aus $x, y \in A$ stets folgt $x \vee y \in A$ und $x \wedge y \in A$. $A \subset V$ heißt isoton-(σ -)abgeschlossen, wenn für jede (abzählbare) Menge $B \subset A$ aus $x = \sup B$ stets folgt $x \in A$.

V heißt (σ -)vollständig, wenn jede (abzählbare) Teilmenge von V ein Supremum und ein Infimum besitzt. V heißt Dedekind-(σ -)vollständig, wenn jede (abzählbare) Teilmenge von V ,

welche in einem Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in V$ enthalten ist, ein Supremum und ein Infimum besitzt. V heißt ordnungsseparabel, wenn jede unendliche Teilmenge von V , welche ein Supremum bzw. Infimum besitzt, eine abzählbare Menge mit dem gleichen Supremum bzw. Infimum enthält.

Eine Folge $(x_n)_n$ in V heißt ordnungskonvergent gegen $x \in V$, in Zeichen: $x_n \xrightarrow[n]{0} x$, wenn es zwei Folgen $(y_n)_n$ und $(z_n)_n$ in V gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $y_n \leq x_n \leq z_n$, sowie $y_n \uparrow x$ und $z_n \downarrow x$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf V heißt ordnungskonvergent gegen $x \in V$, in Zeichen: $\mathcal{F} \xrightarrow{0} x$, wenn gilt:

$$\sup \{y \in V: [y, \infty] \in \mathcal{F}\} = x = \inf \{z \in V: [-\infty, z] \in \mathcal{F}\}.$$

Die feinste Topologie auf V , für welche jeder ordnungskonvergente Filter (jede ordnungskonvergente Folge) topologisch konvergiert, heißt Ordnungstopologie (Ordnungsfolgentopologie)

von V . Man prüft leicht nach, daß eine Menge $A \subset V$ genau dann in der Ordnungs(folgen)topologie abgeschlossen ist, wenn für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf V (für jede Folge $(x_n)_n$ in V) aus

$$\mathcal{F} \xrightarrow{0} x \text{ und } A \in \mathcal{F} \quad (\text{aus } x_n \xrightarrow[n]{0} x \text{ und } \{x_n: n \in \mathbb{N}\} \subset A)$$

folgt $x \in A$. Die Ordnungsfolgentopologie ist besonders handlich, wenn V die folgende Eigenschaft besitzt, welche man

Diagonaleigenschaft nennt: Ist $(x_{nm})_{n,m}$ eine Doppelfolge,

(x_n) eine Folge in V und $x \in V$, und gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_{nm} \xrightarrow[m]{0} x_n \text{ sowie } x_n \xrightarrow[n]{0} x, \text{ so gibt es eine Folge } (m_n)_n \text{ in}$$

$$\mathbb{N}, \text{ so daß } x_{n, m_n} \xrightarrow[n]{0} x \text{ gilt.}$$

Es sei W ein weiterer Verband und $f: V \rightarrow W$ eine Abbildung.

f heißt isoton, wenn für $x, y \in V$ aus $x \leq y$ stets folgt

$f(x) \leq f(y)$. Gilt für $x, y \in V$ sogar stets $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ und $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, so heißt f Verbands-Homomorphismus. Wenn für jede (abzählbare) Menge $A \subseteq V$ aus $x = \sup A$ stets folgt $f(x) = \sup f(A)$, so nennen wir f nach oben (σ -)ordnungsstetig; dual ist nach unten (σ -)ordnungsstetig erklärt. Ist f nach oben und nach unten ordnungsstetig, so heißt f ordnungsstetig. Ist f bijektiv und sind sowohl f als auch f^{-1} isoton, so heißt f Ordnungs-Isomorphismus.

Sind V und W mit ihrer Ordnungstopologie versehen, und hat die Abbildung $f : V \rightarrow W$ die Eigenschaft, daß für jeden ordnungskonvergenten Filter $\mathcal{F} \xrightarrow{o} x \in V$ auch $f(\mathcal{F}) \xrightarrow{o} f(x)$ gilt, so ist f topologisch stetig. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn f ordnungsstetig ist. Analoges gilt für die Ordnungsfolgentopologien.

0.3 Boole'sche Algebren

Es sei A eine Boole'sche Algebra. Bezüglich der Verbandsstruktur von A gelten die in 0.2 getroffenen Vereinbarungen; wir bezeichnen das kleinste Element von A mit 0 , das größte mit 1 , und das (Boole'sche) Komplement von $x \in A$ mit x' . Für

$x, y \in A$ führt man die Operation der symmetrischen Differenz ein durch $x \triangle y := (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$; dadurch wird $(A, \triangle)$ zu einer abelschen Gruppe. Für $B, C \subseteq A$, $x \in A$ setzen wir $B' := \{b' : b \in B\}$, $B \triangle C := \{b \triangle c : b \in B, c \in C\}$, $B \triangle x := B \triangle \{x\}$.

Eine Menge $B \subseteq A$ heißt solid, wenn aus $x \in B$ stets folgt $[0, x] \subseteq B$. Ein solider Teilverband heißt Ideal, ein $(\sigma-)$ isoton-abgeschlossenes Ideal heißt Band (σ -Ideal). Eine Menge $B \subseteq A \setminus \{0\}$ heißt disjunkt, wenn für $x, y \in B$ aus $x \neq y$ stets folgt $x \wedge y = 0$. Eine Folge in A heißt disjunkt, wenn sie injektiv ist und ihre Wertemenge disjunkt ist. Ein Teilverband B von A heißt Unteralgebra, wenn $0 \in B$ gilt und aus $x \in B$ stets folgt $x' \in B$.

Es sei B eine weitere Boole'sche Algebra und $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Ist f ein Verbands-Homomorphismus mit der Eigenschaft $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, so heißt f Boole'scher Homomorphismus.

Wir halten einige fundamentale Aussagen über Boole'sche Algebren fest (zum Beweis vgl. [HA]).

a) Das distributive Gesetz gilt in der folgenden starken Version: Ist $B \subseteq A$, $x, y \in A$ und $x = \sup B$, so gilt $x \wedge y = \sup (B \wedge y)$.

b) Ist B ein Ideal in A , so ist die Faktorgruppe A/B (der abelschen Gruppe $(A, \triangle)$) in natürlicher Weise eine Boole'sche Algebra, und die kanonische Projektion ist ein Boole'scher Homomorphismus.

c) Für $x \in A$ ist $[0, x]$ ein Band, und $[0, x]$ ist in natürlicher Weise selbst eine Boole'sche Algebra. Ist A vollständig, so hat jedes Band diese Gestalt.

d) A ist ordnungsseparabel genau dann, wenn A keine überabzählbare disjunkte Menge enthält.

e) Ist Ω die Menge aller maximalen (echten) Ideale in A , so gibt es einen injektiven Boole'schen Homomorphismus

$$\varphi : A \rightarrow \mathcal{P}(\Omega),$$

die Stone-Darstellung von A . Ω wird mit der von $\text{Bild}(\varphi)$ erzeugten Topologie zu einem hausdorff'schen, kompakten, total unzusammenhängenden Raum, und $\text{Bild}(\varphi)$ besteht aus allen zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen. A ist $(\sigma-)$ vollständig genau dann, wenn Ω (quasi-)extremal ist¹⁾.

0.4 Riesz'sche Räume

Es sei E ein Riesz'scher Raum (auch oft Vektorverband genannt). Bezüglich der linearen Struktur von E benutzen wir die allgemein üblichen Bezeichnungen $(+, -, \cdot, 0)$, bezüglich der Verbandsstruktur von E gelten die in 0.2 getroffenen Vereinbarungen. Mit E^+ bezeichnet man die Menge $\{f \in E : 0 \leq f\}$.

¹⁾ Ein topologischer Raum Ω heißt (quasi-)extremal, wenn für jede offene $(F_\sigma-)$ Menge $A \subset \Omega$ die Menge $\bar{A}$ offen ist.

Für $f \in E$ setzt man $f^+ := f \vee 0$, $f^- := (-f)^+$, $|f| := f \vee (-f)$.

Ein linearer Teilraum von E , der zugleich ein Teilverband ist, heißt Riesz-Teilraum. Ein Riesz-Teilraum F von E heißt ordnungs-dicht, wenn für alle $e \in E^+$ gilt $e = \sup ([0, e] \cap F)$.

Ein Riesz-Teilraum F von E heißt super-ordnungs-dicht, wenn es zu jedem $e \in E^+$ eine Folge $(f_n)_n$ in F gibt mit $0 \leq f_n \uparrow e$.

Eine Menge $A \subseteq E$ heißt solid, wenn aus $f \in A$ stets folgt $[-|f|, |f|] \subseteq A$. Ein solider linearer Teilraum von E heißt

Ideal; jedes Ideal ist ein Riesz-Teilraum. Ein $(\sigma-)$ isoton-abgeschlossenes Ideal heißt Band (σ -Ideal). Das kleinste Ideal, welches eine gegebene Menge $A \subseteq E$ umfaßt, heißt das von A erzeugte Ideal und wird mit $\langle A \rangle$ bezeichnet; für $f \in E$ setzen wir $\langle f \rangle := \langle \{f\} \rangle$. Ideale der Gestalt $\langle f \rangle$ heißen

Hauptideale. Das kleinste Band, welches eine gegebene Menge $A \subseteq E$ umfaßt, heißt das von A erzeugte Band; und wird mit

$[A]$ bezeichnet; für $f \in E$ setzen wir $[f] := [\{f\}]$. Bänder der Gestalt $[f]$ heißen Hauptbänder. Für $A \subseteq E$ setzt man

$A^d := \{f \in E : \forall g \in A \ |f| \wedge |g| = 0\}$. Ein Band A in E mit der Eigenschaft $A + A^d = E$ heißt Projektionsband. Ein Element

$e \in E^+$ heißt starke bzw. schwache Einheit, wenn $\langle e \rangle = E$ bzw. $[e] = E$ gilt. Eine Menge $A \subseteq E \setminus \{0\}$ heißt disjunkt, wenn

für $f, g \in A$ aus $f \neq g$ stets folgt $|f| \wedge |g| = 0$. Eine Folge in E heißt disjunkt, wenn sie injektiv ist und ihre Wertemenge disjunkt ist. Ist $(f_n)_n$ eine Folge in E , $f \in E$, $e \in E^+$,

so sagen wir, die Folge sei e-gleichmäßig konvergent gegen

f , wenn es eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ gibt mit $a_n \downarrow 0$, so daß für

alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_n - f| \leq a_n e$; in Zeichen: $f_n \xrightarrow[n]{e} f$.

Wir sagen, die Folge $(f_n)_n$ in E sei relativ-gleichmäßig konvergent gegen $f \in E$, wenn es ein $e \in E^+$ gibt mit $f_n \xrightarrow[n]{e} f$.

Der Riesz'sche Raum E heißt archimedisch, wenn aus $e \in E^+$ stets folgt $\frac{e}{n} > 0$. E besitzt die (Haupt-)Projektionseigenschaft, wenn jedes (Haupt-)Band ein Projektionsband ist. E heißt universal-(σ -)vollständig, wenn jede (abzählbare) disjunkte Teilmenge von E^+ ein Supremum besitzt.

Ist F ein weiterer Riesz'scher Raum und ist $\varphi : E \rightarrow F$ ein linearer Verbands-Homomorphismus, so heißt φ Riesz-Homomorphismus. Ist φ außerdem bijektiv und ist auch φ^{-1} ein Riesz-Homomorphismus, so heißt φ Riesz-Isomorphismus.

Wir halten einige fundamentale Aussagen über Riesz'sche Räume fest.

a) E ist als Verband distributiv, und das distributive Gesetz gilt sogar in der starken Version von 0.3a). Insbesondere ist für $A \leq E$ die Menge A^d ein Band.

(Beweis: s. [LZ], Thm.12.2)

b) Ist F ein Ideal in E , so ist der Faktorraum E/F in natürlicher Weise ein Riesz'scher Raum, und die kanonische Projektion ist ein Riesz-Homomorphismus.

(Beweis: s. [LZ], Thm.18.9)

c) Wir bezeichnen mit $B(E)$ die Menge aller Bänder in E , versehen mit der Inklusionsordnung, und mit $P(E)$ die Menge aller Projektionsbänder in E , versehen mit der Inklusionsordnung. $P(E)$ ist eine Boole'sche Algebra, und ist E archi-

medisch, so ist $B(E)$ eine vollständige Boole'sche Algebra.

(Beweis: s. [LZ], Thm.30.2, Thm.22.8)

Ist $f \in E$ und $x \in P(E)$, so bezeichnen wir das eindeutig bestimmte Element $g \in E$ mit der Eigenschaft $g \in x$ und $f - g \in x^d$ als $P(x, f)$. Wir erhalten so einen Operator

$$P : P(E) \times E \rightarrow E,$$

den Projektionsoperator.

d) Es gelten die folgenden Implikationen:

$$\begin{array}{l} \text{Ded.-vst.} \Rightarrow \text{Ded.-}\sigma\text{-vst.} \Rightarrow \text{Haupt-Proj.Eigsch.} \Rightarrow \text{archim.} \\ \text{Ded.-vst.} \Rightarrow \text{Proj.-Eigsch.} \Rightarrow \text{Haupt-Proj.Eigsch.} \Rightarrow \text{archim.} \end{array}$$

$$\text{Dedekind-}\sigma\text{-vollständig, Proj.-Eigsch.} \Rightarrow \text{Dedekind-vollst.}$$

$$\exists \text{ schw. Einheit, Ded.-vst., univ.-}\sigma\text{-vst.} \Rightarrow \text{univ.-vollst.}$$

(Beweis: s. [LZ], Thm.25.1 und [NA])

e) In der Ordnungstopologie und in der Ordnungsfolgentopologie sind die Translationen stetig und die 0-Umgebungen absorbierend.

Dies ergibt sich aus den Verträglichkeitsbedingungen zwischen linearer Struktur und Ordnungsstruktur mit Hilfe der Bemerkungen am Schluß von Abschnitt 0.2.

§ 1. Boole'sche Algebren und Riesz'sche Räume

Boole'sche Algebren und Riesz'sche Räume stehen auf zweierlei Arten in Zusammenhang: "strukturell" insofern, als beiden die Struktur eines distributiven Verbandes und einer abelschen Gruppe gemeinsam ist; "kategoriell" insofern, als jedem Riesz'schen Raum in natürlicher Weise gewisse Boole'sche Algebren zugeordnet sind, und umgekehrt. Dieser zweite Gesichtspunkt soll hier verdeutlicht werden. Es handelt sich dabei um im wesentlichen bekannte Aussagen.

A. Riesz'sche Räume über Boole'schen Algebren

1.1 Vereinbarung

In diesem Abschnitt bezeichne A eine Boole'sche Algebra.

Ausgehend von A konstruieren wir in diesem Abschnitt gewisse Riesz'sche Räume: $S(A)$, $L^\infty(A)$, $L^0(A)$, und charakterisieren sie durch interne Eigenschaften.

1.2 Definition

Es sei $\varphi : A \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ die Stone-Darstellung von A (vgl. 0.3e)). Mit $S(A)$ bezeichnen wir die lineare Hülle der Menge $\{\chi_x : x \in A\}$ im Raum $\mathbb{R}^\Omega$, versehen mit der punktweisen Ordnungsstruktur.

1.3 Satz

- a) i) $S(A)$ ist ein Riesz'scher Raum, welcher eine starke Einheit besitzt, nämlich: $e = \chi_{\varphi 1}$.
- ii) Jedes Hauptideal in $S(A)$ ist ein Projektionsband.

- b) Die Abbildung $A \ni x \mapsto [\chi_{\varphi x}] \in P(S(A))$ ist ein Ordnungs-Isomorphismus.
- c) Ist E ein Riesz'scher Raum mit den in a) genannten Eigenschaften, so gibt es einen Riesz-Isomorphismus

$$\Phi : E \rightarrow S(P(E)).$$

Beweis

a)i) Dies ist offensichtlich.

ii) Jedes Hauptideal B in $S(A)$ hat die Gestalt

$$B = \{f \in S(A) : \{f \neq 0\} \subset \varphi x\}$$

für ein $x \in A$, und dann ist

$$B^d = \{f \in S(A) : \{f \neq 0\} \subset \varphi x'\}.$$

Daraus ist ersichtlich $B = B^{dd}$ und $B + B^d = S(A)$; somit ist B ein Projektionsband.

b) Wegen a)i) ist jedes Projektionsband ein Hauptband (vgl. [LZ] Thm.31.1), und wegen a)ii) ist jedes Hauptband ein Hauptideal. Daher hat auch jedes Projektionsband B in $S(A)$ die oben angegebene Gestalt, und die Behauptung ist nun leicht einzusehen.

c) Der Beweis wird in Abschnitt B. nachgetragen.

1.4 Definition

Es sei wieder $\varphi : A \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ die Stone-Darstellung von A . Mit $L^\infty(A)$ bezeichnen wir den linearen Raum $C(\Omega)$ aller stetigen reellen Funktionen auf Ω , versehen mit der punktweisen Ordnungsstruktur.

Bevor wir uns mit den Eigenschaften dieses Raumes befassen, geben wir ein Lemma an, das zugleich einige Begriffe aus der Theorie der Riesz'schen Räume anschaulich macht:

1.5 Lemma

Es sei X ein hausdorff'scher kompakter Raum, E sei der Riesz'sche Raum $C(X)$, und sei $B \subseteq E$. Dann gilt:

- a) B ist maximales Ideal in E genau dann, wenn es ein $f \in E$ gibt mit $B = \{g \in E: f(g) = 0\}$.
- b) B ist Band in E genau dann, wenn es eine regulär-offene Menge $U \subseteq X$ gibt mit $B = \{f \in E: f \neq 0 \subseteq U\}$.
- c) B ist Projektionsband in E genau dann, wenn es eine offen-abgeschlossene Menge $U \subseteq X$ gibt mit $B = \{f \in E: \{f \neq 0\} \subseteq U\}$.

Beweis

(s. [LZ Exc.22.10, Exp.27.7, Thm.43.4])

1.6 Satz

- a) i) $L^\infty(A)$ ist archimedisch und besitzt eine starke Einheit, nämlich $e = \chi_{\varphi 1}$.
- ii) $L^\infty(A)$ ist vollständig bezüglich relativ-gleichmäßiger Konvergenz.
- iii) Ist B ein Band, J ein maximales Ideal in $L^\infty(A)$ mit $B \not\subseteq J$, so gibt es ein Projektionsband C in $L^\infty(A)$ mit $C \not\subseteq J$, $C \subseteq B$.
- b) Die Abbildung $A \ni x \mapsto [\chi_{\varphi x}] \in P(L^\infty(A))$ ist ein Ordnungs-Isomorphismus.
- c) Ist E ein Riesz'scher Raum mit den in a) genannten Eigenschaften, so gibt es einen Riesz-Isomorphismus $\Gamma: E \rightarrow L^\infty(P(E))$.

Beweis

- a)i) ist offensichtlich.
- ii) Dies ist nur eine Riesz-theoretische Formulierung der bekannten Normvollständigkeit von $C(X)$.

1) d.h. U ist gleich dem offenen Kern von $\bar{U}$.

iii) Im Stone-Kompaktum Ω von A bilden die offen-abgeschlossenen Mengen eine topologische Basis; diese Tatsache wird mit 1.5 in die Aussage iii) übersetzt.

b) Dies ist mit 1.5c) leicht einzusehen.

c) E besitze zunächst die Eigenschaften a)i) und a)ii). Wir benutzen einen Darstellungssatz von Yosida (s. [LZ] Thm.45.4) und erhalten: Es gibt einen hausdorff'schen kompakten Raum Ω , so daß E zu $C(\Omega)$ Riesz-isomorph ist.

Hat nun E auch die Eigenschaft a)iii), so hat auch $C(\Omega)$ diese Eigenschaft, und mit 1.5 ergibt sich, daß die Mengenalgebra G der offen-abgeschlossen Teilmengen von Ω eine topologische Basis bildet; zugleich liefert 1.5c) einen Ordnungs-Isomorphismus zwischen G und $P(C(\Omega))$. Andererseits muß nun Ω zum Stone-Kompaktum Ω' von G homöomorph sein (s. [HA] Thm.7). Insgesamt erhalten wir eine Kette von Riesz-Isomorphismen:

$$E \cong C(\Omega) \cong C(\Omega') = L^\infty(G) \cong L^\infty(P(C(\Omega))) \cong L^\infty(P(E)).$$

□

Ist die Boole'sche Algebra A σ -vollständig, so können wir einen weiteren Raum konstruieren.

1.7 Definition

A sei σ -vollständig und $\varphi : A \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ ihre Stone-Darstellung. Es sei Σ die σ -Mengenalgebra der Baire'schen Mengen auf Ω , Σ_0 sei das σ -Ideal der mageren Baire'schen Mengen in Σ . Es sei M der Riesz'sche Raum aller Σ -meßbaren reellen Funktionen (punktweise Ordnung) und M_0 das σ -Ideal $\{f \in M : \{f \neq 0\} \in \Sigma_0\}$ in M. Wir bezeichnen mit $L^0(A)$ den

Riesz'schen Raum M/M_0 , und für $f \in M$ bezeichnen wir die durch f repräsentierte Klasse in $L^0(A)$ mit $\bar{f}$.

1.8 Satz

a) A sei σ -vollständig. Dann gilt:

- i) $L^0(A)$ besitzt eine schwache Einheit, nämlich $e = \overline{\chi}_{\varphi 1}$.
- ii) $L^0(A)$ ist Dedekind- σ -vollständig und universal- σ -vollständig.

b) A sei σ -vollständig. Die Abbildung

$$A \ni x \mapsto [\overline{\chi}_{\varphi x}] \in P(L^0(A))$$

ist ein Ordnungs-Isomorphismus.

c) Ist E ein Riesz'scher Raum mit den in a) genannten Eigenschaften, so gibt es einen Riesz-Isomorphismus

$$\overline{} : E \rightarrow L^0(P(E)).$$

Beweis

a)ii) Ist $(\bar{f}_n)_n$ eine nach oben beschränkte (bzw. disjunkte) Folge in $L^0(A)^+$, so wähle man eine nach oben beschränkte (bzw. disjunkte) Folge $(f_n)_n$ von Repräsentanten in M und bilde deren punktweises Supremum f . Es ist $f \in M$ und $\bar{f} = \sup \{ \bar{f}_n : n \in \mathbb{N} \}$ in $L^0(A)$.

a)i) $L^0(A)$ ist insbesondere archimedisch (0.4d) und somit ist $[e] = \{e\}^{dd}$ (s. [LZ] Thm.22.3). Offenbar ist $\{e\}^d = \{\bar{0}\}$ und somit $[e]^{dd} = L^0(A)$. Daher ist e eine schwache Einheit.

b) Wegen a)ii) und 0.4d) besitzt $L^0(A)$ die Hauptprojektioneigenschaft, und die genannte Abbildung ist wohldefiniert.

Sind $x, y \in A$, $x < y$, so ist $U := \varphi y \setminus \varphi x$ offen und nicht leer, nach dem Kategoriesatz von Baire also nicht mager. Dann ist

$$\bar{\chi}_U \in [\bar{\chi}_{\varphi y}] \text{ und } \bar{\chi}_U \in \{\bar{\chi}_{\varphi x}\}^d, \text{ also } \chi_U \neq [\bar{\chi}_{\varphi x}]^{dd} = [\bar{\chi}_{\varphi x}].$$

Dies zeigt, daß die genannte Abbildung injektiv ist.

Es sei $\bar{f} \in L^0(A)$. Dann ist, wie man leicht einsieht,

$$[\bar{f}] = \{\bar{g} \in L^0(A) : \{g \neq 0\} \cap \{f = 0\} \in \Sigma_0\}.$$

Nun gibt es zu jedem $U \in \Sigma$ ein $x \in A$ mit

$$(\varphi x \setminus U) \cup (U \setminus \varphi x) \in \Sigma_0 \quad (\text{s. [HA] Thm.13}).$$

Speziell gibt es also zu $U = \{f \neq 0\}$ ein $x \in A$ mit

$$(\varphi x \setminus \{f \neq 0\}) \cup (\{f \neq 0\} \setminus \varphi x) \in \Sigma_0,$$

und dann ist $[\bar{f}] = [\bar{\chi}_{\varphi x}]$. Da $L^0(A)$ eine schwache Einheit besitzt, ist jedes Projektionsband ein Hauptband, und dies zeigt die Surjektivität der in Frage stehenden Abbildung.

Da sie offenbar in beiden Richtungen isoton ist, ist sie ein Ordnungs-Isomorphismus.

c) Der Beweis wird in Abschnitt B. nachgetragen.

1.9 Korollar

Ist A vollständig, so ist $L^0(A)$ Dedekind-vollständig und universal-vollständig.

Beweis

Wegen 1.8b) ist auch $P(L^0(A))$ vollständig, und dann besitzt $L^0(A)$ die Projektionseigenschaft. Die Behauptung folgt daher aus 1.8a) mit 0.4d).

An Stelle von Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen hätten wir auch stetige Funktionen verwenden können, um den Raum $L^0(A)$ einzuführen. Diese Aussage soll jetzt präzisiert werden.

1.10 Definition

Ist Ω ein topologischer Raum, so setzen wir

$$C^\infty(\Omega) := \{f \in \mathbb{R}^\Omega : f \text{ stetig, } \{\omega : f(\omega) \in \mathbb{R}\} \text{ dicht in } \Omega\}.$$

Diese Menge ist gegenüber der Multiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen und besitzt eine partielle Addition:

$$f + g = h : \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega (f(\omega), g(\omega), h(\omega) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\omega) + g(\omega) = h(\omega)).$$

Ferner wird sie mit der punktweisen Ordnungsstruktur versehen.

1.11 Lemma

Ist Ω ein quasi-extremales¹⁾ Kompaktum, so ist $C^\infty(\Omega)$ ein Riesz'scher Raum.

Beweis

(s. [VU] Thm. V 2.1)

□

1.12 Satz

A sei σ -vollständig, Ω sei das Stone-Kompaktum von A,

und es seien M, Σ_0 wie in 1.7. Die Abbildung

$$\alpha : C^\infty(\Omega) \ni f \mapsto \{g \in M : \{f \neq g\} \in \Sigma_0\} \in L^0(A)$$

ist ein Riesz-Isomorphismus.

Beweis

(s. [SIK] Anhang)

□

Durch diesen Isomorphismus werden insbesondere die Räume $S(A)$ und $L^\infty(A)$ in $L^0(A)$ eingebettet. Wir halten die folgenden Tatsachen fest, deren Beweise sehr einfach sind und weggelassen werden:

¹⁾ vgl. Fußnote zu 0.3e).

1.13 Lemma

A sei σ -vollständig, Ω , Σ , Σ_0 , M seien wie in 1.7, α sei wie in 1.12.

- a) $\alpha(S(A))$ besteht aus allen Äquivalenzklassen in $L^0(A)$,
welche durch eine Σ -Elementarfunktion repräsentiert werden.
- b) $\alpha(L^\infty(A))$ besteht aus allen Äquivalenzklassen in $L^0(A)$,
welche durch eine beschränkte, Σ -meßbare Funktion repräsentiert werden.

Insbesondere ist $\alpha(S(A))$ super-ordnungs-dicht in $L^0(A)$ und $\alpha(L^\infty(A))$ ist ein Ideal in $L^0(A)$.

□

Wir werden, wenn A σ -vollständig ist, die Räume $\alpha(S(A))$ und $\alpha(L^\infty(A))$ wieder mit $S(A)$ bzw. $L^\infty(A)$ bezeichnen, in der Hoffnung, daß dies nicht zu Mißverständnissen führt.

9. Darstellungstheorie

1.14 Vereinbarung

In diesem Abschnitt bezeichne E einen Riesz'schen Raum.

Geht man von dem abstrakten Raum E aus, konstruiert sich zunächst die Boole'sche Algebra $P(E)$ der Projektionsbänder, dann deren Stone-Kompaktum Ω und schließlich den Raum $C^\infty(\Omega)$, so erhält man einen konkreten Funktionenraum, in welchen man unter gewissen Voraussetzungen den ursprünglichen Raum E einbetten kann. Wir zitieren hier zwei Sätze dieses Typs und benutzen sie einerseits, um die noch ausstehenden Beweise aus Abschnitt A. nachzutragen; andererseits benutzen wir unseren Satz 1.12, um den beiden Darstellungssätzen eine maßtheoretisch relevante Formulierung zu geben.

1.15 Satz (Spektraldarstellungssatz von Nakano)

E besitze die Hauptprojektionseigenschaft, e sei eine schwache Einheit für E . Es sei $\varphi : P(E) \rightarrow P(\Omega)$ die Stone-Darstellung der Boole'schen Algebra $P(E)$. Dann gibt es eine Menge $\hat{E} \subset C^\infty(\Omega)$, welche bezüglich der in 1.10 angegebenen Struktur von $C^\infty(\Omega)$ ein Riesz'scher Raum ist, und einen Riesz-Isomorphismus $\hat{\Phi} : E \rightarrow \hat{E}$ mit der Eigenschaft
(+) $\hat{\Phi}(P(x, e)) = \chi_{\varphi x}$ für $x \in P(E)$.

Beweis

(s. [LZ] Thm.51.2, Thm.51.3)

Am angegebenen Ort wird statt der Boole'schen Algebra $P(E)$

der Boole'sche Ring aller Hauptbänder in E verwendet; da wir jedoch die Existenz einer schwachen Einheit voraussetzen, ist dieser gleich $P(E)$. Die Gleichung $(+)$ wird am angegebenen Ort zwar nicht behauptet, aber doch bewiesen.

Wir tragen nun nach:

Beweis von 1.3c)

E besitze eine starke Einheit und jedes Hauptideal in E sei ein Projektionsband. Es folgt ohne weiteres, daß E die Hauptprojektioneigenschaft besitzt; sei $\bar{\Phi}: E \rightarrow \hat{E} \subset C^\infty(\Omega)$ die Nakano-Darstellung bezüglich einer starken (also auch schwachen) Einheit e . Dann ist $\chi_\Omega = \bar{\Phi}(e)$ eine starke Einheit für $\hat{E}$, folglich sind alle $\hat{f} \in \hat{E}$ beschränkt, also $\hat{E} \subset C(\Omega) = L^\infty(P(E))$. Andererseits ist für jedes $x \in P(E)$ $\chi_{\varphi x} = \bar{\Phi}(P(x, e)) \in \hat{E}$, also ist $S(P(E)) \subset \hat{E}$. Es bleibt zu zeigen, daß jedes $\hat{f} \in \hat{E}$ nur endlich viele Werte annimmt.

Anderenfalls gibt es ein $\hat{f} \in \hat{E}$, so daß 0 ein Häufungspunkt von $\text{Bild}(\hat{f})$ ist. Sei x das von $f := \bar{\Phi}^{-1}(\hat{f})$ in E erzeugte Ideal. Nach Voraussetzung ist $x \in P(E)$, wir zeigen:

$$\{\omega \in \Omega : \hat{f}(\omega) \neq 0\} = \varphi x.$$

" $\subset$ ": Es gilt $|f| \wedge P(x^d, e) = 0$, also auch $|\hat{f}| \wedge \chi_{\varphi x^d} = 0$.

Ist nun $\omega \in \Omega$ mit $\hat{f}(\omega) \neq 0$ gegeben, so muß

$$\chi_{c(\varphi x)}(\omega) = \chi_{\varphi(x^d)}(\omega) = 0$$

sein, also $\omega \in \varphi x$.

" $\supset$ ": Da x von f als Ideal erzeugt wird, und da $P(x, e) \in x$ gilt, muß es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $P(x, e) \leq n|f|$, also auch $\chi_{\varphi x} = \bar{\Phi}(P(x, e)) \leq \bar{\Phi}(n|f|) = n|\hat{f}|$. Ist also $\omega \in \varphi x$, so

ist $\chi_{\varphi x}(\omega) = 1$, also $|\hat{f}(\omega)| \geq \frac{1}{n} > 0$.

Die Menge $\{\omega \in \Omega : \hat{f}(\omega) \neq 0\}$ ist nun insbesondere abgeschlossen, also kompakt, und daher ist $\text{Bild}(\hat{f}) \setminus \{0\}$ als stetiges Bild dieser Menge kompakt. Dies widerspricht der Annahme, daß 0 ein Häufungspunkt von $\text{Bild}(\hat{f})$ ist. □

Eine dem Satz 1.3c) ähnliche Aussage findet sich bei ([LZ], Thm.37.7, Thm.37.6, Thm. 37.1). Unser Satz 1.3c) ist jedoch in der Aussage stärker und im Beweis direkter.

1.16 Satz

E sei Dedekind- σ -vollständig und besitze eine schwache Einheit e; φ sei die Stone-Darstellung von $P(E)$.

$P(E)$ ist eine σ -vollständige Boole'sche Algebra, und es gibt ein super-ordnungs-dichtes Ideal $\hat{E}$ in $L^0(P(E))$ sowie einen Riesz-Isomorphismus $\bar{\Phi} : E \rightarrow \hat{E}$ mit der Eigenschaft

$$(++)\quad \bar{\Phi}(P(x, e)) = \bar{\chi}_{\varphi x} \quad \text{für } x \in P(E).$$

Beweis

Zur σ -Vollständigkeit von $P(E)$ siehe [LZ], Thm.30.6.

Die Nakano-Darstellung 1.15 liefert zusammen mit 1.12 den Raum $\hat{E}$ und den Isomorphismus $\bar{\Phi}$. Die Gleichung (+) aus 1.15 garantiert (++), und damit $S(P(E)) \subset \hat{E}$. Da $S(P(E))$ in $L^0(P(E))$ super-ordnungs-dicht ist (1.13), trifft dies erst recht für $\hat{E}$ zu; da $\hat{E}$ überdies selbst Dedekind-vollständig ist, muß $\hat{E}$ ein Ideal in $L^0(P(E))$ sein. Damit ist alles bewiesen.

Beweis von 1.8c)

Man hat nur 1.16 anzuwenden und zu beachten, daß jedes positive Element in $L^0(P(E))$ Supremum einer disjunkten Folge in $L^{\omega}(P(E))$ ist.

1.17 Satz (Darstellungssatz von Ogasawara-Waeda)

E sei archimedisch, Ω sei das Stone-Kompaktum der vollständigen Boole'schen Algebra $B(E)$. Es gibt einen ordnungsdichten Riesz-Teilraum $\hat{E}$ von $C^\infty(\Omega)$ und einen Riesz-Isomorphismus $\mathbb{I}: E \rightarrow \hat{E}$. Ist E Dedekind-vollständig, so ist $\hat{E}$ ein Ideal in $C^\infty(\Omega)$. Besitzt E eine schwache Einheit e, so kann man $\hat{E}$ und $\mathbb{I}$ so wählen, daß $\mathbb{I}(e) = \chi_\Omega$ gilt.

Beweis

(s. [LZ], Thm. 50.1, Thm. 50.8)

[

1.18 Korollar

E sei archimedisch, φ sei die Stone-Darstellung von $B(E)$. Es gibt einen ordnungsdichten Riesz-Teilraum $\hat{E}$ von $L^0(B(E))$ und einen Riesz-Isomorphismus $\mathbb{I}: E \rightarrow \hat{E}$. Ist E Dedekind-vollständig, so ist $\hat{E}$ ein Ideal in $L^0(B(E))$. Besitzt E eine schwache Einheit e, so kann man $\hat{E}$ und $\mathbb{I}$ so wählen, daß $\mathbb{I}(e) = \bar{\chi}_{\varphi E}$ gilt.

Beweis

Direkt aus 1.17 und 1.12.

[

§ 2. Topologien auf Boole'schen Algebren und Riesz'schen Räumen

Wegen der strukturellen Verwandtschaft zwischen Riesz'schen Räumen und Boole'schen Algebren verläuft auch das Studium von Topologien auf ihnen weitgehend parallel. Wir wenden jedoch unser Augenmerk auf den in § 1 vorgestellten "kategoriellen" Zusammenhang und untersuchen die Beziehungen zwischen Topologien auf Riesz'schen Räumen und Topologien auf den diesen Räumen im Sinne von § 1 zugeordneten Boole'schen Algebren. Dadurch wird es möglich, einige Sätze über topologische Riesz'sche Räume unmittelbar auf Boole'sche Algebren zu übertragen.

A. Übertragungsmechanismus

2.1 Vereinbarung

In diesem Abschnitt bezeichne E einen Riesz'schen Raum mit der Hauptprojektionseigenschaft.

Wir betrachten in diesem Abschnitt Topologien auf E und Topologien auf der Boole'schen Algebra $P(E)$, welche mit der Riesz'schen bzw. Boole'schen Struktur in gewisser Weise verträglich sind, und wir untersuchen die Wechselwirkung zwischen solchen Topologien auf E und auf $P(E)$. Um die Deutlichkeit zu erhöhen, führen wir für die Boole'schen Operationen in $P(E)$ neue Zeichen ein.

2.2 Vereinbarung

In diesem Abschnitt verwenden wir für die Boole'schen Operationen der Boole'schen Algebra $P(E)$ die folgenden Zeichen:
 $\sqcap$ für Infimum, $\sqcup$ für Supremum, $\sqsubseteq$ für die Ordnungsrelation,
 $\perp$ für Komplement, Δ für symmetrische Differenz, 0 für das kleinste Element, 1 für das größte Element.

Man beachte: für $x, y \in P(E)$ gilt

$$x \sqcap y = x \wedge y, \quad x \sqcup y = x + y, \quad x \sqsubseteq y \iff x \leq y, \quad x^\perp = x^d, \\ 0 = \{0\}, \quad 1 = E \quad (\text{vgl. [LZ], § 30}).$$

In 0.4c) haben wir den Projektionsoperator $P : P(E) \times E \rightarrow E$ eingeführt. Wir halten seine wichtigsten Eigenschaften fest:

2.3 Lemma

a) Für jedes $x \in P(E)$ ist die Abbildung

$$E \ni f \mapsto P(x, f) \in E$$

ein ordnungs-stetiger, idempotenter Riesz-Homomorphismus.

b) Für jedes $f \in E^+$ ist die Abbildung

$$P(E) \ni x \mapsto P(x, f) \in E^+$$

ordnungs-stetig und besitzt folgende Eigenschaften:

- i) $P(x \sqcup y, f) + P(x \sqcap y, f) = P(x, f) + P(y, f) \quad , \quad x, y \in P(E)$
- ii) $x \sqsubseteq y \implies P(y \sqcap x^\perp, f) = P(y, f) - P(x, f) \quad , \quad x, y \in P(E).$

Beweis

Für a) s. ([LZ], Thm.24.5(ii), Thm.24.6, Exc.24.11).

Für b) s. ([LZ], Thm.30.1, Thm.30.4(i), Thm.30.5(ii)).

Wir setzen nun voraus, daß E eine schwache Einheit e besitzt, und definieren einige Abbildungen zwischen E und $P(E)$. Von diesen ist " δ " die wichtigste, die anderen haben nur technische Bedeutung.

2.4 Lemma

Es sei e eine schwache Einheit für E . Wir betrachten die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned}\delta &: P(E) \ni x \mapsto P(x, e) \in E \\ \gamma &: E \ni f \mapsto [f^+] \in P(E) \\ \underline{\alpha} &: E \ni f \mapsto [(f - e)^+] \in P(E) \\ \bar{\alpha} &: E \ni f \mapsto [(f - e)^-]^{\perp} \in P(E)\end{aligned}$$

Es gelten folgende Aussagen:

- a) δ ist injektiv und ordnungsstetig; ferner gilt:
 - i) $\delta(x \sqcap y) + \delta(x \sqcup y) = \delta(x) + \delta(y)$, $x, y \in P(E)$
 - ii) $\delta(x \triangle y) = |\delta(x) - \delta(y)|$, $x, y \in P(E)$
 - iii) $f \in \text{Bild}(\delta) \iff f \wedge (e - f) = 0$, $f \in E$
- b) γ ist ein nach oben ordnungs-stetiger Verbands-Homomorphismus.
- c) $\underline{\alpha}$ ist ein nach oben ordnungs-stetiger Verbands-Homomorphismus.
- d) $\bar{\alpha}$ ist ein nach unten ordnungs-stetiger Verbands-Homomorphismus.
- e) $\underline{\alpha}(f) \sqsubseteq \bar{\alpha}(f) \sqsubseteq \underline{\alpha}(rf)$, $f \in E$, $1 < r \in \mathbb{R}$.
- f) $\bar{\alpha}(\delta(x)) = x = \underline{\alpha}(r\delta(x))$, $x \in P(E)$, $1 < r \in \mathbb{R}$
- g) $\delta(\bar{\alpha}(f)) \leq f$, $f \in E^+$
- h) $\underline{\alpha}(f + g) \sqsubseteq \underline{\alpha}(2f) \sqcup \underline{\alpha}(2g)$, $f, g \in E$

Bevor wir das Lemma beweisen, führen wir uns an einem einfachen Beispiel die Wirkung der Abbildungen j^* , $\bar{\alpha}$, $\underline{\alpha}$ vor Augen; dies ist für das Verständnis der Aussagen und ihrer Beweise recht nützlich. Es sei also E der Riesz'sche Raum $\mathbb{R}^X$, wo X eine beliebige Menge ist, und e sei die konstante Funktion mit dem Wert 1. Dann ist, für $f \in E$:

$$j^*(f) = \{g \in E: \{g \neq 0\} \subset \{f > 0\}\}$$

$$\underline{\alpha}(f) = \{g \in E: \{g \neq 0\} \subset \{f > 1\}\}$$

$$\bar{\alpha}(f) = \{g \in E: \{g \neq 0\} \subset \{f \geq 1\}\}.$$

Beweis von Lemma 2.4:

a) Daß δ ordnungs-stetig ist, sowie die Gültigkeit von i) folgt sofort aus 2.3b).

$$\begin{aligned} \text{ii): } \delta(x \triangle y) &= \delta((x \sqcup y) \cap (x \sqcap y)^\perp) \\ &= \delta(x \sqcup y) - \delta(x \sqcap y) && (\text{nach 2.3b)ii)}) \\ &= \delta(x) + \delta(y) - 2\delta(x \sqcap y) && (\text{nach a)i)}) \\ &= |\delta(x) - \delta(y)| && (\text{nach [LZ], Thm.11.8}). \end{aligned}$$

iii): Für $x \in P(E)$ ist

$$\begin{aligned} \delta(x) \wedge (e - \delta(x)) &= \delta(x) \wedge \delta(1) - \delta(x) \\ &= \delta(x) \wedge \delta(x)^\perp && (\text{nach 2.3b)ii)}) \\ &= \delta(x \sqcap x^\perp) = \delta(o) = 0. \end{aligned}$$

Ist andererseits $f \in E$, $f \wedge (e - f) = 0$, so setzen wir

$x := [f]$ und erhalten

$$\delta(x) - f = P(x, e) - P(x, f) = P(x, e - f) = 0,$$

also $f = \delta(x) \in \text{Bild}(\delta)$.

' Sind $x, y \in P(E)$, $x \neq y$, so ist $x \triangle y \neq o$. Da e eine schwache Einheit ist, folgt $\delta(x \triangle y) \neq o$, und mit a)ii) ergibt sich die Injektivität von δ .

b) Für "Verbands-Homomorphismus" siehe [LZ], Thm.30.1 und Thm.30.5(ii).

Sei $A \uparrow f$ in E gegeben, o.E. $A \subseteq E^+$. Hat $x \in P(E)$ die Eigenschaft $[g] \subseteq x$ für alle $g \in A$, so ist $g \in [g] \subseteq x$ für alle $g \in A$, und da x ein Band ist, folgt $f \in x$, also auch $[f] \subseteq x$. Dies zeigt $\sup\{\gamma(g) : g \in A\} = \gamma(f)$, also die behauptete Stetigkeit.

c) und d) folgen direkt aus b).

e) Für $f \in E$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(f) \sqcap (\bar{\alpha}(f))^{\perp} &= [(f - e)^+] \sqcap [(f - e)^-] \\ &= [(f - e)^+ \wedge (f - e)^-] = [0] = 0, \end{aligned}$$

also $\underline{\alpha}(f) \sqsubseteq \bar{\alpha}(f)$.

Sei $f \in E$, $1 < r \in \mathbb{R}$ gegeben, sowie $x \in P(E)$ mit

$$[(f - e)^-] \sqcup [(rf - e)^+] \sqsubseteq x, \text{ so folgt}$$

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{r})e &= (e - f) + (f - \frac{e}{r}) \leq (e - f)^+ + (f - \frac{e}{r})^+ \\ &= (f - e)^- + (f - \frac{e}{r})^+ \in x, \end{aligned}$$

also $e \in x$ und damit $x = E = 1$.

Dies zeigt $(\bar{\alpha}(f))^{\perp} \sqcup \underline{\alpha}(rf) = 1$, also $\bar{\alpha}(f) \sqsubseteq \underline{\alpha}(rf)$.

f) Sei $x \in P(E)$, $1 < r \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir haben:

$$(r\delta(x) - e)^+ \leq (r\delta(x))^+ = r\delta(x) \in x, \text{ folglich } \underline{\alpha}(r\delta(x)) \sqsubseteq x.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} P(x, (\delta(x) - e)^-) &= (P(x, \delta(x)) - P(x, e))^- = (\delta(x) - \delta(x))^- = 0, \\ \text{folglich } x \sqcap [(\delta(x) - e)^-] &= 0, \text{ und somit } x \sqsubseteq \bar{\alpha}(\delta(x)). \end{aligned}$$

Zusammen mit e) erhalten wir $x \sqsubseteq \bar{\alpha}(\delta(x)) \sqsubseteq \underline{\alpha}(r\delta(x)) \sqsubseteq x$.

g) Für $f \in E^+$ gilt

$$\begin{aligned} (P(\bar{\alpha}(f), f) - P(\bar{\alpha}(f), e))^- &= P(\bar{\alpha}(f), (f - e)^-) = 0, \text{ und dann} \\ \delta(\bar{\alpha}(f)) = P(\bar{\alpha}(f), e) &\leq P(\bar{\alpha}(f), f) \leq f. \end{aligned}$$

h) Für $f, g \in E$ ist

$$\begin{aligned} 0 \leq 2(f + g - e)^+ &= ((2f - e) + (2g - e))^+ \\ &\leq (2f - e)^+ + (2g - e)^+, \end{aligned}$$

und daher $(f + g - e)^+ \in [(2f - e)^+ + (2g - e)^+]$.

Dies hat zur Folge

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(f + g) &= [(f + g - e)^+] \sqsubseteq [(2f - e)^+] \sqcup [(2g - e)^+] \\ &= \underline{\alpha}(2f) \sqcup \underline{\alpha}(2g). \end{aligned}$$

□

2.5 Vereinbarung

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit T_0 bzw. τ_0 die Ordnungstopologie auf E bzw. $P(E)$ und mit T_{so} bzw. τ_{so} die Ordnungsfolgentopologie auf E bzw. $P(E)$ (vgl. 0.2).

2.6 Lemma

E besitze eine schwache Einheit e , und δ sei wie in 2.4 definiert. Die Abbildung

$$\delta : (P(E), \tau_0) \rightarrow (E, T_0)$$

$$\text{bzw.} \quad \delta : (P(E), \tau_{so}) \rightarrow (E, T_{so})$$

ist stetig und abgeschlossen.

Beweis

Die Stetigkeit von δ ist in beiden Fällen eine direkte Folge von 2.4a). Wir beweisen die Abgeschlossenheit von δ nur für den ersten Fall; für den zweiten beweist man sie ganz analog. Wir benutzen die Abbildungen γ und $\bar{\alpha}$ aus 2.4.

Es sei also $X \subset P(E)$ τ_0 -abgeschlossen und $B := \delta(X) \subset E$; und es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf E , $f \in E$ mit $B \in \mathcal{F} \xrightarrow{0} f$. Wir zeigen $f \in B$, woraus die Abgeschlossenheit von B und damit die von δ folgt. Den Beweis führen wir in 3 Schritten.

1. Behauptung: $\gamma(f) = \bar{\alpha}(f)$.

" $\supset$ ": Das Intervall $[0, e]$ ist T_0 -abgeschlossen, und wegen

$B \subset \text{Bild}(\delta) \subset [0, e]$ muß $0 \leq f \leq e$ sein. Es folgt

$e = f + (e - f) = f^+ + (e - f)^+$, also

$P(E) \ni 1 = E = [e] = [f^+] \sqcup [(e - f)^+]$, und dies zeigt

$$\bar{\alpha}(f) = [(e - f)^+]^\perp \sqsubseteq [f^+] = \gamma(f).$$

" $\Leftarrow$ ": Anderenfalls wäre $0 \neq \gamma(f) \cap \bar{\alpha}(f)^\perp = [f^+] \cap [(e - f)^+]$,

also müßte auch

$$0 < f \wedge (e - f) = P([f \wedge (e - f)], f \wedge (e - f))$$

$$\leq P([f \wedge (e - f)], f)$$

sein. Dies führen wir zum Widerspruch.

Dazu setzen wir:

$$C := \{c \in E: [c, \infty] \in \mathcal{F}\}, D := \{d \in E: [-\infty, d] \in \mathcal{F}\}.$$

Es gilt $C \uparrow f$, und dann auch

$$\{P([f \wedge (e - f)], c^+): c \in C\} \uparrow P([f \wedge (e - f)], f) > 0,$$

daher muß es ein $c \in C$ geben mit $P([f \wedge (e - f)], c^+) > 0$,

und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 < f \wedge (e - f) \wedge c^+ &= P([f \wedge (e - f) \wedge c^+], f \wedge (e - f) \wedge c^+) \\ &\leq P([f \wedge (e - f) \wedge c^+], e - f). \end{aligned}$$

Es gilt $D \downarrow f$, und dann auch

$$\begin{aligned} \{P([f \wedge (e - f) \wedge c^+], (e - d)^+): d \in D\} \uparrow \\ P([f \wedge (e - f) \wedge c^+], e - f) > 0, \end{aligned}$$

daher muß es ein $d \in D$ geben mit

$$P([f \wedge (e - f) \wedge c^+], (e - d)^+) > 0.$$

Nun ist $[c, d] \cap B \in \mathcal{F}$, insbesondere ist diese Menge nicht

leer, es gibt also ein $x \in X$ mit $c \leq \delta(x) \leq d$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\leq f \wedge (e - f) \wedge c^+ \wedge (e - d)^+ \leq c^+ \wedge (e - d)^+ \\ &\leq \delta(x) \wedge (e - \delta(x)) = 0, \end{aligned}$$

also einen Widerspruch.

2. Behauptung: $x_0 := \gamma(f) = \bar{\alpha}(f) \in X$.

Sind C und D wie oben definiert, so folgt aus 2.4b)d):

$\gamma(C) \uparrow \gamma(f) = x_0$ und $\bar{\alpha}(D) \downarrow \bar{\alpha}(f) = x_0$. Wie wir unter 1. bereits festgestellt haben, gibt es zu $c \in C$, $d \in D$ ein $x \in X$ mit $c \leq \delta(x) \leq d$, und dann ist, wieder nach 2.4, $\gamma(c) \sqsubseteq \gamma(\delta(x)) = x = \bar{\alpha}(\delta(x)) \sqsubseteq \bar{\alpha}(d)$. Daher ist die Familie

$$\{ [\gamma(c), \bar{\alpha}(d)] \cap X : c \in C, d \in D \}$$

Basis eines Filters $\mathcal{O}$ auf $P(E)$ mit $X \in \mathcal{O} \xrightarrow{0} x_0$. Die Behauptung folgt nun aus der τ_0 -Abgeschlossenheit von X .

3. Behauptung: $f = \delta(x_0)$.

Für $c \in C$ ist $[c, \infty] \cap B \neq \emptyset$; da e eine obere Schranke für B ist, ist somit e auch eine obere Schranke für C . Damit folgt, für $c \in C$:

$$c \leq c^+ = P([c^+], c^+) \leq P(\gamma(c), e) = \delta(\gamma(c)),$$

und daher ist $\delta(\gamma(C)) \uparrow$ - konfinal mit C . Aus ähnlichen

Gründen ist 0 eine untere Schranke für D , und mit 2.4g)

ergibt sich, für $d \in D$: $d \geq \delta(\bar{\alpha}(d))$, und daher ist $\delta(\bar{\alpha}(D))$

$\downarrow$ - konfinal mit D . Die Stetigkeitseigenschaften von

δ , γ , $\bar{\alpha}$ ergeben $\delta(\gamma(C)) \uparrow \delta(\gamma(f)) = \delta(x_0)$ sowie

$\delta(\bar{\alpha}(D)) \downarrow \delta(\bar{\alpha}(f)) = \delta(x_0)$. Wir erhalten

$$f = \sup C \leq \sup \delta(\gamma(C)) = \delta(x_0) = \inf \delta(\bar{\alpha}(D)) \leq \inf D = f,$$

also die Behauptung.

Wir erhalten insgesamt: $f = \delta(x_0) \in B$, was zu zeigen war.

Wir führen nun einige Begriffe über Topologien auf Riesz-schen Räumen ein; dabei folgen wir weitgehend der Terminologie von [FR1]. Anschließend übertragen wir diese Begriffe auf Boole'sche Algebren.

2.7 Definition

Es sei T eine Topologie auf E .

T heißt linear, wenn (E, T) ein topologischer Vektorraum ist.

T heißt lokal-solid, wenn T translationsinvariant ist und eine O -Umgebungsbasis aus soliden Mengen besitzt.¹⁾

T heißt Fatou'sch, wenn T linear ist und eine O -Umgebungsbasis aus soliden und isoton-abgeschlossenen Mengen besitzt.

T heißt Lebesgue'sch, wenn T translationsinvariant ist und wenn für $B \subset E$ aus $B \downarrow O$ stets folgt $O \in \bar{B}$.

2.8 Definition

Es sei A eine Boole'sche Algebra, τ eine Topologie auf A .

τ heißt invariant, wenn für jedes $a \in A$ die Abbildung $x \mapsto a \wedge x$ stetig ist.

τ heißt linear, wenn (A, Δ, τ) eine topologische Gruppe ist.

τ heißt lokal-solid, wenn τ invariant ist und ein o -Umgebungsbasis aus soliden Mengen besitzt.

τ heißt Fatou'sch, wenn τ linear ist und eine o -Umgebungsbasis aus soliden und isoton-abgeschlossenen Mengen besitzt.

τ heißt Lebesgue'sch, wenn τ invariant ist und wenn für $X \subset A$ aus $X \downarrow o$ stets folgt $o \in \bar{X}$.

¹⁾ An dieser Stelle weichen wir von Fremlin's Terminologie ab, der die Linearität in die Definition einschließt.

2.9 Bemerkung

Ist τ eine lineare Topologie auf der Boole'schen Algebra A , so induziert sie in natürlicher Weise eine uniforme Struktur auf A , wie aus der Theorie der topologischen Gruppen bekannt ist. Begriffe wie "gleichmäßige Stetigkeit" und "topologische Vollständigkeit" beziehen sich immer auf diese Struktur.

Wir beweisen nun einen ersten Satz über den Zusammenhang zwischen Topologien auf E und Topologien auf $P(E)$.

2.10 Satz

Es sei e eine schwache Einheit für E und $\delta : P(E) \rightarrow E$ sei wie in 2.4 definiert. Ferner sei eine Topologie T auf E gegeben.

- a) Ist T hausdorff'sch, so ist $\delta^{-1}(T)$ hausdorff'sch.
- b) Ist T translationsinvariant und ist die Abbildung $E \ni f \mapsto |f| \in E$ T -stetig, so ist $\delta^{-1}(T)$ invariant.
- c) Ist T lokal-solid, so ist $\delta^{-1}(T)$ lokal-solid.
- d) Ist T linear und lokal-solid, so ist $\delta^{-1}(T)$ linear und lokal-solid. Ist T außerdem hausdorff'sch, so ist $\text{Bild}(\delta)$ T -abgeschlossen in E .
- e) Ist T Fatou'sch, so ist $\delta^{-1}(T)$ Fatou'sch.
- f) Ist T linear, lokal-solid und Lebesgue'sch, so ist auch $\delta^{-1}(T)$ linear, lokal-solid und Lebesgue'sch.
- g) Es ist $\delta^{-1}(T_0) = \tau_0$ und $\delta^{-1}(T_{so}) = \tau_{so}$.

Beweis

- a) Dies ist klar, weil δ nach 2.4a) injektiv ist.
- b) Nach Voraussetzung ist für $a \in P(E)$ die Abbildung

$$E \ni f \mapsto |f - \delta(a)| \in E$$

stetig. Daher ist auch die Einschränkung

$$\text{Bild}(\delta) \ni \delta(x) \mapsto |\delta(x) - \delta(a)| = \delta(x \Delta a) \in \text{Bild}(\delta)$$

stetig bezüglich der Spur von T auf $\text{Bild}(\delta)$. Offenbar ist dann die Abbildung $P(E) \ni x \mapsto x \Delta a \in P(E)$ stetig bezüglich $\delta^{-1}(T)$.

c) Dies folgt aus b) und der Isotonie von δ .

d) Nach c) ist $\delta^{-1}(T)$ lokal-solid. Sind U, V solide T - O -Umgebungen mit $V + V \subset U$, so ist $\delta^{-1}(V) \Delta \delta^{-1}(V) \subset \delta^{-1}(U)$; denn aus $x, y \in \delta^{-1}(V)$ folgt

$$\delta(x \Delta y) = |\delta(x) - \delta(y)| \leq \delta(x) + \delta(y) \in V + V \subset U,$$

und damit $x \Delta y \in \delta^{-1}(U)$.

Die Abbildung $\varphi: E \ni f \mapsto f \wedge (e - f)$ ist T -stetig. Ist T hausdorff'sch, so ist $\varphi^{-1}(\{0\})$ T -abgeschlossen, und nach 2.4a)iii) ist $\text{Bild}(\delta) = \varphi^{-1}(\{0\})$.

e) und f) folgen sofort aus der Ordnungs-Stetigkeit von δ .

g) Dies ist nur eine andere Formulierung von 2.7. □

Im Anschluß an Satz 2.10 stellt sich, etwas vage formuliert, die folgende Frage: Gegeben sei eine Topologie $\mathcal{T}$ auf $P(E)$ mit gewissen Eigenschaften. Gibt es eine Topologie T auf E mit entsprechenden Eigenschaften, so daß $\mathcal{T} = \delta^{-1}(T)$ ist? Wir geben ein Verfahren zur Konstruktion einer solchen Topologie an, indem wir die aus der Maßtheorie bekannte Konstruktion der "Topologie der Konvergenz nach Maß" verallgemeinern.

2.11 Lemma

E besitze die Hauptprojektionseigenschaft, e sei eine schwache Einheit für E und δ , $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ seien wie in 2.4 definiert.

Ferner sei eine lineare, lokal-solid Topologie τ auf P(E) gegeben und $\mathcal{U}$ sei eine 0-Umgebungsbasis für τ aus soliden Mengen. Für $U \in \mathcal{U}$ und $0 < r \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\bar{W}(U, r) := \{f \in E: \bar{\alpha}(\frac{1}{r}|f|) \in U\} \quad \text{und}$$

$$\underline{W}(U, r) := \{f \in E: \underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|) \in U\}.$$

a) Die Familien $\overline{\mathcal{W}} := \{\bar{W}(U, r): U \in \mathcal{U}, 0 < r < 1\}$

und $\underline{\mathcal{W}} := \{\underline{W}(U, r): U \in \mathcal{U}, 0 < r < 1\}$

sind Filterbasen auf E, welche den selben Filter $\mathcal{W}$ erzeugen.

b) $\mathcal{W}$ ist der 0-Umgebungsfiler einer (eindeutig bestimmten) lokal-soliden Topologie $T^0(\tau)$ auf E, so daß $(E, +, T^0(\tau))$ eine topologische Gruppe ist. Es gilt $\tau = \delta^{-1}(T^0(\tau))$.

c) Ist τ hausdorff'sch, so ist $T^0(\tau)$ hausdorff'sch.

d) Ist e sogar eine starke Einheit für E, so ist $T^0(\tau)$ linear (und lokal-solid).

e) Ist τ Fatou'sch und $T^0(\tau)$ linear, so ist $T^0(\tau)$ Fatou'sch.

f) Ist τ Lebesgue'sch, so ist $T^0(\tau)$ linear und Lebesgue'sch (und lokal-solid).

Beweis

a) Die Behauptung ergibt sich aus den folgenden Beziehungen, die man mit 2.4 leicht verifiziert:

$$\bar{W}(U_1 \cap U_2, \min(r_1, r_2)) \subset \bar{W}(U_1, r_1) \cap \bar{W}(U_2, r_2), \quad U_1, U_2 \in \mathcal{U}, \\ 0 < r_1, r_2 \in \mathbb{R},$$

$$\underline{W}(U, \frac{r}{2}) \cap \bar{W}(U, r) \subset \underline{W}(U, r), \quad U \in \mathcal{U}, \quad 0 < r \in \mathbb{R}, \\ 0 \in \underline{W}(U, r), \quad U \in \mathcal{U}, \quad 0 < r \in \mathbb{R}.$$

b) Ebenso leicht verifiziert man, indem man 2.4h) benutzt:

$$\underline{W}(V, \frac{r}{2}) + \underline{W}(V, \frac{r}{2}) \subset \underline{W}(U, r), \quad U, V \in \mathcal{U}, \quad V \triangle V \subset U, \quad 0 < r \in \mathbb{R}.$$

Alle $W \in \mathcal{WK}$ sind solid, haben also insbesondere die Eigenschaft $W = -W$. Die Existenz und Eindeutigkeit von $T^0(\tau)$ ist daher eine bekannte Tatsache aus der Theorie der topologischen Gruppen. Die Gleichung $\tau = \delta^{-1}(T^0(\tau))$ folgt aus der Beziehung

$$U = \delta^{-1}(\underline{W}(U, r)), \quad U \in \mathcal{U}, \quad 0 < r < 1,$$

welche sich aus 2.4f) ergibt.

c) Sei τ hausdorff'sch und sei $0 \neq f \in E$ gegeben. Da E archimedisch ist, gilt $\frac{e}{n} \downarrow_n 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f| \leq \frac{e}{n}, \text{ d.h. } (n|f| - e)^+ \neq 0. \text{ Hieraus folgt } \underline{\alpha}(n|f|) \neq 0,$$

und so gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\underline{\alpha}(n|f|) \notin U$. Es folgt

$$f \in \underline{W}(U, \frac{1}{n}) \text{ und damit die Behauptung.}$$

d) Ist e eine starke Einheit für E , so sind für $0 < r \in \mathbb{R}$ die Mengen $[-re, re]$ absorbierend. Nun ist aber für $U \in \mathcal{U}$:

$$[-re, re] \subset \underline{W}(U, r),$$

$$\text{denn aus } |f| \leq re \text{ folgt } \underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|) \leq \underline{\alpha}(e) = [(e - e)^+] = 0 \in U.$$

Daher sind alle $W \in \mathcal{WK}$ absorbierend, und die Behauptung folgt.

e) Ist τ Fatou'sch und $T^0(\tau)$ linear, so wähle man $\mathcal{W}$ so, daß alle $U \in \mathcal{W}$ solid und isoton-abgeschlossen sind. Dann besteht $\mathcal{W}$ aus soliden und isoton-abgeschlossenen Mengen nach 2.4c).

f) Es sei $A \downarrow 0$ in E gegeben sowie $U \in \mathcal{W}$, $0 < r \in \mathbb{R}$.

Dann gilt auch $\frac{1}{r}A \downarrow 0$, und nach 2.4d) auch $\bar{\alpha}(\frac{1}{r}A) \downarrow 0$.

Da τ Lebesgue'sch ist, gibt es ein $f \in A$ mit $\bar{\alpha}(\frac{1}{r}f) \in U$, d.h. $f \in \bar{W}(U, r)$. Dies zeigt, daß $T^0(\tau)$ Lebesgue'sch ist.

Insbesondere sind dann alle Folgen der Gestalt $(\frac{1}{n}|f|)_n$ gegen 0 konvergent bezüglich $T^0(\tau)$, so daß alle 0-Umgebungen absorbierend sind. Dies zeigt, daß $T^0(\tau)$ linear ist. □

2.12 Definition

Es sei e eine Schwache Einheit für E , $\delta : P(E) \rightarrow E$ sei wie in 2.4 definiert, und τ sei eine lineare, lokal-solid Topologie auf $P(E)$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}(\tau)$ die Familie aller linearen, lokal-soliden Topologien T auf E , welche die Gleichung $\delta^{-1}(T) = \tau$ erfüllen.

In 2.11d) und 2.11f) werden Kriterien dafür angegeben, daß $\mathcal{T}(\tau)$ nicht leer ist. Wir wollen die Struktur der Familie $\mathcal{T}(\tau)$ etwas genauer untersuchen. Dem dient folgende Definition.

2.13 Definition

Es sei $H \uparrow \subset E^+$. Zwei lineare, lokal-solid Topologien T und S auf E heißen H-äquivalent, in Zeichen: $S \sim_H T$, wenn für jedes $h \in H$ die Spuren von S und T auf $[-h, h]$ übereinstimmen.

Die durch T repräsentierte H -Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit $\langle T \rangle_H$. Ist $e \in E^+$, so schreiben wir $S \underset{e}{\sim} T$ für $S \underset{\{e\}}{\sim} T$ und $\langle T \rangle_e$ für $\langle T \rangle_{\{e\}}$. Ist $H = E^+$, so schreiben wir einfach $S \sim T$ bzw. $\langle T \rangle$.

Ist T eine lineare und lokal-solide Topologie auf E und ist T hausdorff'sch bzw. Lebesgue'sch, so sind alle Topologien in $\langle T \rangle$ hausdorff'sch bzw. Lebesgue'sch, denn diese beiden Eigenschaften hängen nur davon ab, wie T sich auf ordnungsbeschränkten Mengen verhält.

2.14 Lemma

Es sei e eine schwache Einheit für E und $\delta : P(E) \rightarrow E$ sei wie in 2.4 definiert. Auf E seien zwei lineare, lokal-solide Topologien T und S gegeben. Man betrachte folgende Aussagen:

- a) $\delta^{-1}(T) = \delta^{-1}(S)$
- b) $T \underset{e}{\sim} S$
- c) $T \sim S$

Die Aussagen a) und b) sind äquivalent; sind T und S beide Lebesgue'sch, so sind alle drei Aussagen äquivalent.

Beweis

Die Implikationen $c) \Rightarrow b) \Rightarrow a)$ sind trivial.

"a) $\rightarrow$ b)": Es sei eine S - O -Umgebung U gegeben. Dann gibt es eine solide S - O -Umgebung U_1 mit $U_1 + U_1 \subset U$; wir wählen $0 < r \in \mathbb{R}$ so klein, daß $re \in U_1$ gilt. Da S und T auf $\text{Bild}(\delta)$ übereinstimmen, gibt es eine solide T - O -umgebung V mit $V \cap \text{Bild}(\delta) \subset U_1$. Dann ist $V_1 := rV$ eine T - O -umgebung; wir zeigen:

$$(+)\quad V_1 \cap [-e, e] \subset U.$$

Dazu sei $f \in V_1 \cap [-e, e]$ gegeben. Lemma 2.4g) ergibt

$\delta(\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|)) \leq \frac{1}{r}|f| \in \frac{1}{r}V_1 = V$, folglich haben wir

$\delta(\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|)) \in V \cap \text{Bild}(\delta) \subset U_1$. Wegen

$$P(\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|), |f|) \leq P(\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|), e) = \delta(\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|))$$

erhalten wir $P(\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|), |f|) \in U_1$.

Weiter gilt

$$P((\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|))^{\perp}, (\frac{1}{r}|f| - e)^+) = P([\frac{1}{r}|f| - e]^+)^{\perp}, (\frac{1}{r}|f| - e)^+ = 0$$

und wir erhalten

$$P((\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|))^{\perp}, |f|) \leq P((\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|))^{\perp}, re) \leq re \in U_1.$$

Insgesamt ergibt sich

$$|f| = P(\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|), |f|) + P((\underline{\alpha}(\frac{1}{r}|f|))^{\perp}, |f|) \in U_1 + U_1 \subset U,$$

also (+). Da die Menge $[-e, e]$ absolut-konvex ist, hat (+)

zur Folge, daß die Spur von S auf $[-e, e]$ gröber als die Spur von T auf $[-e, e]$ ist. Aus Symmetriegründen folgt $S \sim_e T$.

"b) $\Rightarrow$ c)": S und T seien Lebesgue'sch. Es sei wieder eine solide S-O-Umgebung U gegeben sowie $h \in E^+$. Dann gibt es eine solide S-O-Umgebung U_1 mit $U_1 + U_1 \subset U$. Da e eine schwache Einheit ist, gilt $(h - ne)^+ \downarrow_n 0$. S ist Lebesgue'sch und so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(h - ne)^+ \in U_1$. Nach Voraussetzung gibt es eine solide T-O-Umgebung V mit $V \cap [-ne, ne] \subset U_1$. Wir zeigen $V \cap [-h, h] \subset U$, woraus dann wie oben die Behauptung folgt.

Dazu sei $f \in V \cap [-h, h]$ gegeben. Wir haben

$$0 \leq |f| \wedge ne \leq |f| \in V, \text{ folglich } |f| \wedge ne \in V \cap [-ne, ne] \subset U_1,$$

sowie $(|f| - ne)^+ \leq (h - ne)^+ \in U_1$, und damit insgesamt

$$|f| = |f| \wedge ne + (|f| - ne)^+ \in U_1 + U_1 \subset U.$$

2.15 Lemma

Es sei $H \uparrow \subset E^+$, und T sei eine lineare, lokal-solid Topologie auf E . Dann gilt:

a) $\langle T \rangle_H$ ist ein vollständiger Verband.

b) Für $h \in H$ setzen wir

$$\mathcal{H}_h : E \ni f \mapsto (f \wedge h) \vee (-h) \in E,$$

und $\mathcal{L}$ sei eine 0-Umgebungsabasis für T aus soliden Mengen.

Dann ist $\mathcal{L} := \{ \mathcal{H}_h^{-1}(B) : B \in \mathcal{L}, h \in H \}$ eine 0-Umgebungsabasis für die grösste Topologie in $\langle T \rangle_H$.

c) Ist T Fatou'sch, so ist auch die grösste Topologie in $\langle T \rangle_H$ Fatou'sch.

Beweis

a) Es sei $\mathcal{S}$ eine nichtleere Teilfamilie von $\langle T \rangle_H$ und S_0 sei die obere Grenze der Topologien in $\mathcal{S}$, gebildet im Verband aller Topologien auf E . Ist $h \in H$, so ist die Inklusionsabbildung $[-h, h] \rightarrow E$ T - S -stetig für alle $S \in \mathcal{S}$, folglich ist sie auch T - S_0 -stetig. Da alle $S \in \mathcal{S}$ linear und lokal-solid sind, ist auch S_0 linear und lokal-solid, und damit ergibt sich $S_0 \in \langle T \rangle_H$. Die Behauptung ist bewiesen, wenn wir noch die Existenz einer grössten Topologie in $\langle T \rangle_H$ nachweisen; dies geschieht in b).

b) Wir halten die folgenden Eigenschaften von $\mathcal{H}$ fest:

Für $f, g \in E^+$, $h \in H$ gilt

$$i) |\mathcal{H}_h(f)| = \mathcal{H}_h(|f|) = |f| \wedge h$$

$$ii) \mathcal{H}_h(f) \leq f$$

$$iii) \mathcal{H}_h(f + g) \leq \mathcal{H}_h(f) + \mathcal{H}_h(g)$$

$$iv) f \leq g \implies \mathcal{H}_h(f) \leq \mathcal{H}_h(g)$$

v) Für festes $f \in E^+$ ist $\mathcal{H}_h(f)$ isoton in h .

Hieraus und aus den Eigenschaften von $\mathcal{L}$ schließen wir:

$\mathcal{L}$ ist eine Filterbasis bestehend aus soliden und absorbierenden Mengen, und zu jedem $C \in \mathcal{L}$ gibt es ein $C_1 \in \mathcal{L}$, so daß $C_1 + C_1 \subset C$ gilt. Wie man aus der Theorie der topologischen linearen Räume weiß, ist damit $\mathcal{L}$ eine 0-Umgebungsbasis einer (eindeutig bestimmten) linearen Topologie S_0 auf E , und $\mathcal{V}_0$ ist lokal-solid.

Sind $h \in H$, $B \in \mathcal{L}$, so gilt $\mathcal{K}_h^{-1}(B) \cap [-h, h] = B \cap [-h, h]$. Daraus schließen wir $S_0 \approx_H T$, also $S_0 \in \langle T \rangle_H$.

Ist $S \in \langle T \rangle_H$ gegeben sowie $h \in H$, $B \in \mathcal{L}$, so gibt es eine solide S -0-Umgebung V mit $V \cap [-h, h] \subset B$; dann gilt $V \subset \mathcal{K}_h^{-1}(V) = \mathcal{K}_h^{-1}(V \cap [-h, h]) \subset \mathcal{K}_h^{-1}(B)$. Daher ist S feiner als S_0 ; da S beliebig war, ist S_0 die größte Topologie in $\langle T \rangle_H$.

c) Die Distributivitätseigenschaften von E (vgl. 0.4a)) haben zur Folge, daß die Abbildungen $\mathcal{K}_h$ ($h \in H$) auf E^+ ordnungsstetig sind. Ist T Fatou'sch, so kann man $\mathcal{L}$ so wählen, daß alle $B \in \mathcal{L}$ solid und isoton-abgeschlossen sind; dann sind auch alle $C \in \mathcal{L}$ solid und isoton-abgeschlossen, und folglich ist S_0 Fatou'sch. □

Wir können nun das Lemma 2.11 ergänzen:

2.16 Satz

Es seien $E, e, \tau, \mathcal{T}(\tau)$ wie in 2.12. Dann gilt:

- a) Die Familie $\mathcal{T}(\tau)$ ist leer oder ein vollständiger Verband.
- b) Falls e sogar eine starke Einheit oder τ Lebesgue'sch ist, so ist $\mathcal{T}(\tau)$ nicht leer, und die größte Topologie in $\mathcal{T}(\tau)$ ist gleich der in 2.11 konstruierten Topologie $T^0(\tau)$.
- c) Ist τ Lebesgue'sch, so sind alle Topologien in $\mathcal{T}(\tau)$ Lebesgue'sch.

Beweis

a) Ist $T \in \mathcal{T}(\tau)$, so besagt 2.14 "a) $\iff$ b)": $\mathcal{T}(\tau) = \langle T \rangle_e$. Die Behauptung folgt daher aus 2.15a).

b) Es seien $f \in E$ und $0 < r < 1$ gegeben. Dann gilt (mit $\mathcal{K}_e$ wie in 2.15b)):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} |\mathcal{K}_e(f)| - e\right)^+ &= \left(\frac{1}{r} (|f| \wedge e) - e\right)^+ = \frac{1}{r} ((|f| - re) \wedge (e - re))^+ \\ &= \left(\frac{1}{r} |f| - e\right)^+ \wedge \left(\frac{1}{r} - 1\right)e. \end{aligned}$$

Wir erhalten (mit $\underline{a}$ wie in 2.4, unter Beachtung von 2.4b)):

$$\begin{aligned} \underline{a}\left(\frac{1}{r} |\mathcal{K}_e(f)|\right) &= \left[\left(\frac{1}{r} |\mathcal{K}_e(f)| - e\right)^+\right] \\ &= \left[\left(\frac{1}{r} |f| - e\right)^+\right] \sqcap \left[\left(\frac{1}{r} - 1\right)e\right] \\ &= \underline{a}\left(\frac{1}{r} |f|\right). \end{aligned}$$

Ist nun U eine solide τ - o -Umgebung, so zeigt diese Gleichung:

$$\underline{W}(U, r) = \mathcal{K}_e^{-1}(\underline{W}(U, r)); \text{ nach 2.15b) ist daher } T^0(\tau) \text{ gleich}$$

der größten Topologie in $\langle T^0(\tau) \rangle_e$. Nach 2.11d)f) ist aber

$T^0(\tau) \in \mathcal{T}(\tau)$, und nach 2.14 "b) $\iff$ c)" ist dann $\mathcal{T}(\tau) = \langle T^0(\tau) \rangle_e$.

c) Nach 2.11f) ist $T^0(\tau)$ Lebesgue'sch, und wie wir in der Bemerkung im Anschluß an 2.13 festgestellt haben, sind dann alle Topologien in $\langle T^0(\tau) \rangle = \mathcal{V}(\tau)$ Lebesgue'sch.

Besitzt E eine starke Einheit und ist T eine lineare, lokal-soliden Topologie auf E, so läßt sich die feinste Topologie in $\langle T \rangle$ genau beschreiben:

2.17 Lemma

E besitze eine starke Einheit e, T sei eine lineare, lokal-soliden Topologie auf E, und $\mathcal{L}$ sei eine 0-Umgebungsbasis für T aus soliden Mengen. Für jede Folge

$\beta = (B_n)_n \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}}$ setzen wir

$$V(\beta) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n B_i \cap [-ie, ie] .$$

Dann ist $\mathcal{K} := \{ V(\beta) : \beta \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}} \}$ eine 0-Umgebungsbasis für die feinste Topologie in $\langle T \rangle$.

Beweis

Bei [WA] wird (in etwas allgemeinerem, nicht Riesz-theoretischem Zusammenhang) gezeigt, daß $\mathcal{K}$ eine 0-Umgebungsbasis einer linearen Topologie S ist, und daß S die feinste aller linearen Topologien ist, deren Spuren auf $[-ie, ie]$, $i \in \mathbb{N}$, mit der Spur von T übereinstimmen. Da in einem Riesz'schen Raum die Summe von endlich vielen soliden Mengen solid ist ([LZ], Cor.15.6(i)), sind alle $V \in \mathcal{K}$ solid, und damit ist S lokal-solid.

Zum Schluß dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit einer ordnungstheoretischen Eigenschaft, die im Zusammenhang mit der Ordnungsfolgentopologie von Interesse ist: der Diagonaleigenschaft. Besitzt E eine schwache Einheit, so hat mit E auch $P(E)$ die Diagonaleigenschaft (s. [LZ], Thm.74.2, Thm.68.4, Thm.68.8)¹⁾. Umgekehrt hat mit $P(E)$ keineswegs immer auch E die Diagonaleigenschaft; vgl. z.B. [LZ], Thm.70.3 oder unser Korollar 4.3. Immerhin gilt:

2.18 Satz

E sei Dedekind- σ -vollständig und universal- σ -vollständig. Besitzt $P(E)$ die Diagonaleigenschaft, dann auch E .

Beweis

1. Wir dürfen o.E. die Existenz einer schwachen Einheit voraussetzen. Denn offenbar genügt es, die Diagonaleigenschaft für jedes abzählbar erzeugte Band in E nachzuweisen; und wie wir sogleich sehen werden, ist jedes abzählbar erzeugte Band in E bereits ein Hauptband:

Das Band B in E werde von der Folge $(f_n)_n$ erzeugt. Wir dürfen $0 \leq f_n \uparrow$ annehmen und setzen für $n \in \mathbb{N}$: $g_n := P([f_{n-1}]^\perp, f_n)$. Die Folge $(g_n)_n$ ist disjunkt, besitzt also ein Supremum, und dieses erzeugt B .

¹⁾ A.a.O. wird für Boole'sche Ringe statt der Diagonaleigenschaft die "Egoroff-Eigenschaft" verwendet. Diese ist aber für Boole'sche Algebren zur Diagonaleigenschaft äquivalent.

Im folgenden sei also e eine schwache Einheit für E , und δ , $\underline{a}$, $\bar{a}$ seien wie in 2.4 definiert.

2. Behauptung: Ist $(f_n)_n$ eine Folge in E , so gibt es eine Folge $(b_n)_n$ in $\mathbb{R}$ und ein $g \in E^+$, so daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n > 0$ und $|b_n f_n| \leq g$.

Da E archimedisch ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $| \frac{1}{k} f_n | \downarrow_k 0$, nach 2.4d) dann auch $\bar{a}(| \frac{1}{k} f_n |) \downarrow_k 0$, und nach 1.4e) erst recht $\underline{a}(| \frac{1}{k} f_n |) \downarrow_k 0$. Wir setzen $x_{nk} := \underline{a}(| \frac{1}{k} f_n |) \in P(E)$.

Da $P(E)$ die Diagonaleigenschaft besitzt, gibt es eine Folge (y_n) in $P(E)$ und eine Doppelfolge $(k_{mn})_{m,n}$ in $\mathbb{N}$, so daß $y_n \downarrow 0$ und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $y_m \sqsubseteq x_{n, k_{mn}}$. (Vgl. [LZ], Thm. 73.2). Wir definieren induktiv zwei Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ in $\mathbb{R}$:

$$a_1 := 1, \quad b_n := \frac{1}{k_{nn}} \min \{a_1, \dots, a_n\},$$

$$a_{n+1} := \max \{b_1 k_{n+1,1}, \dots, b_n k_{n+1,n}\}.$$

Wir setzen $y_0 := 1$ und $z_m := y_{m-1} \sqcap y_m^{\perp}$, $m \in \mathbb{N}$.

$(z_m)_m$ ist eine disjunkte Folge in $P(E)$ mit $\sup z_m = 1$.

Nun existiert $g := \sup \{a_m \delta(z_m) : m \in \mathbb{N}\} \in E^+$. Wir zeigen:

(+) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $P(z_m, |b_n f_n|) \leq a_m \delta(z_m)$.

Fall $m \leq n$: Nach Definition von b_n ist $b_n k_{nn} \leq a_m$. Wir haben

$$z_m \sqcap \left[\left(\frac{1}{k_{nn}} |f_n| - e \right)^+ \right] = z_m \sqcap \underline{a} \left(\frac{1}{k_{nn}} |f_n| \right) = z_m \sqcap x_{n, k_{nn}}$$

$$\sqsubseteq y_m^{\perp} \sqcap y_n = 0.$$

Daraus folgt $P(z_m, \left(\frac{1}{k_{nn}} |f_n| - e \right)^+) = 0$, und dies hat

$P(z_m, \frac{1}{k_{nn}} | f_n |) - P(z_m, e) \leq 0$ zur Folge. Wir erhalten somit

$$P(z_m, b_n | f_n |) = b_n k_{nn} P(z_m, \frac{1}{k_{nn}} | f_n |) \leq a_m \delta(z_m).$$

Fall $m > n$: Nach Definition von a_m ist $b_n k_{mn} \leq a_m$. Wir haben

$$z_m \cap \left(\frac{1}{k_{mn}} | f_n | - e \right)^+ = z_m \cap \left(\frac{1}{k_{mn}} | f_n | \right) = z_m \cap x_{n, k_{mn}}$$

$$y_m \cap y_n = 0.$$

Daraus folgt wie oben $P(z_m, \frac{1}{k_{mn}} | f_n |) \leq P(z_m, e)$. Wir erhalten

$$P(z_m, b_n | f_n |) = b_n k_{mn} P(z_m, \frac{1}{k_{mn}} | f_n |) \leq a_m \delta(z_m).$$

Damit ist (+) bewiesen, und wegen $\sup_m z_m = 1$ erhalten wir

$$b_n | f_n | = P(1, b_n | f_n |) = \sup_m P(z_m, b_n | f_n |) \leq \sup_m a_m \delta(z_m) = g.$$

3. Behauptung: Ist $f_n \downarrow 0$ in E , so gibt es eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ mit $0 < a_n \uparrow \infty$, so daß gilt $a_n f_n \xrightarrow{0} 0$.

Da E Dedekind- σ -vollständig ist und da $P(E)$ die Diagonaleigenschaft besitzt, gilt in E der verallgemeinerte Satz von Egoroff (s. [LZ', Thm. 74.5]). Dieser besagt in unserer Situation: Es gibt eine Folge $(x_k)_k$ in $P(E)$ mit $x_k \uparrow [f_1]$,

so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $P(x_k, f_n) \xrightarrow{\frac{f_1}{n}} 0$.

Nach Definition dieses Konvergenzbegriffes (vgl. 0.4) gibt es dann eine strikt aufsteigende Folge $(n_k)_k$ in $\mathbb{N}$ mit

$$P(x_k, f_n) \leq \frac{1}{k^2} f_1 \quad \text{für } n \geq n_k, k \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{für } n < n_1 \\ k & \text{für } n_k \leq n < n_{k+1} \end{cases}$$

und zeigen

(+) für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $P(x_k, a_n f_n) \xrightarrow[n]{f_1} 0$.

Dazu sei $k \in \mathbb{N}$ und $0 < b \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir wählen $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $\max(k, \frac{1}{b}) \leq k_1$ und setzen $n' := n_{k_1}$. Ist dann $n \geq n'$,

so gibt es genau ein $k_2 \geq k_1$ mit $n_{k_2} \leq n \leq n_{k_2+1}$,
und wir haben

$$P(x_k, a_n f_n) \leq P(x_{k_2}, a_n f_n) = k_2 P(x_{k_2}, f_n) \leq \frac{f_1}{k_2} \leq b f_1,$$

also (+).

Wir setzen $x_0 := 0$ und $z_k := x_k \sqcap x_{k-1}^{\perp}$. $(z_k)_k$ ist eine disjunkte Folge in $P(E)$ mit $\sup_k z_k = [f_1]$, und wegen $z_k \sqsubseteq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt aus (+):

$$P(z_k, a_n f_n) \xrightarrow[n]{f_1} 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Es gibt also eine Doppelfolge $(c_{kn})_{k,n}$ in $\mathbb{R}$ mit

$$c_{kn} \downarrow_n 0 \text{ für alle } k \text{ und } P(z_k, a_n f_n) \leq c_{kn} f_1 \text{ für alle } k, n \in \mathbb{N}.$$

Da E universal- σ -vollständig ist, existiert

$$g_n := \sup_k P(z_k, c_{kn} f_1) \in E^+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $P(z_k, g_n) = P(z_k, c_{kn} f_1) \downarrow_n 0$, und wegen

$\sup_k z_k = [f_1]$ folgt hieraus $g_n \downarrow_n 0$. Weiter haben wir

$$P(z_k, a_n f_n) \leq P(z_k, c_{kn} f_1) \leq g_n \text{ für alle } k, n \in \mathbb{N} \text{ und dann}$$

$$a_n f_n = P([f_1], a_n f_n) = \sup_k P(z_k, a_n f_n) \leq g_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt $a_n f_n \xrightarrow[n]{0} 0$, also die Behauptung.

4. Die Diagonaleigenschaft folgt nun aus den Behauptungen unter 2. und 3. mit ($[LZ]_j$, Thm. 70.2).

B. Anwendung des Übertragungsmechanismus

In diesem Abschnitt benutzen wir die Ergebnisse aus Abschnitt A., um einige Sätze aus der Theorie der topologischen Riesz'schen Räume auf Boole'sche Algebren zu übertragen. Daneben führen wir die Theorie der Topologien auf Boole'schen Algebren eigenständig weiter, und schließlich erhalten wir, indem wir abermals die Ergebnisse aus A. anwenden, neue Aussagen über Topologien auf Riesz'schen Räumen.

2.19 Vereinbarung

In diesem Abschnitt bezeichne E einen Riesz'schen Raum und A eine Boole'sche Algebra. Mit T_0 bzw. τ_0 bezeichnen wir die Ordnungstopologie auf E bzw. A ; mit T_{so} bzw. τ_{so} bezeichnen wir die Ordnungsfolgentopologie auf E bzw. A .

2.20 Definition

Eine Abbildung $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riesz-Pseudo-Norm, wenn für $f, g \in E$ gilt:

- i) $\varphi(f) \geq 0$
- ii) $\varphi(f + g) \leq \varphi(f) + \varphi(g)$
- iii) aus $|f| \leq |g|$ folgt $\varphi(f) \leq \varphi(g)$
- iv) $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(rf) = 0$.

Eine Riesz-Pseudo-Norm φ auf E heißt Fatou'sch, wenn aus $B \in E^+$, $B \nmid f \in E$ stets folgt $\varphi(f) = \sup \{ \varphi(g) : g \in B \}$.

2.21 Definition

Eine Abbildung $\lambda: A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Sub-Inhalt, wenn für $x, y \in A$ gilt:

- i) $\lambda(0) = 0$
- ii) $\lambda(x \vee y) \leq \lambda(x) + \lambda(y)$
- iii) aus $x \leq y$ folgt $\lambda(x) \leq \lambda(y)$.

Ein Sub-Inhalt λ auf A heißt Fatou'sch, wenn aus $B \subset A$, $B \uparrow x \in A$ stets folgt $\lambda(x) = \sup \{ \lambda(y) : y \in B \}$.

2.22 Lemma

Es sei τ eine lineare, lokal-soliden Topologie auf A .

- a) Die Boole'schen Operationen " $\cap$ ", " $\vee$ ", " $\wedge$ " sind gleichmäßig stetig.
- b) Ist λ ein Sub-Inhalt auf A , der im Punkt 0 stetig ist, so ist λ gleichmäßig stetig.
- c) Ist τ hausdorff'sch, so ist für $x, y \in A$, $x \leq y$, die Menge $[x, y]$ abgeschlossen.
- d) Ist τ hausdorff'sch, $B \uparrow \subset A$, und ist $x \in A$ ein Häufungspunkt des Filters $\mathcal{F}(B \uparrow)$, so ist $x = \sup B$.

Beweis

a) Wir haben $x' = 1 \triangle x$ für $x \in A$; die Stetigkeit von " $\cap$ " folgt daher unmittelbar aus der Linearität von τ .

Die Stetigkeit von " $\vee$ " im Punkt $(0, 0) \in A \times A$ ergibt sich aus der Stetigkeit von " $\triangle$ " im Punkt $(0, 0)$, zusammen mit der Beobachtung, daß für solides $U \subset A$ stets gilt $U \vee U \subset U \triangle U$. Die gleichmäßige Stetigkeit von " $\vee$ " folgt dann aus der Abschätzung

$$(x_1 \vee y_1) \triangle (x_2 \vee y_2) \leq (x_1 \triangle x_2) \vee (y_1 \triangle y_2), \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in A.$$

Natürlich ist mit " $\vee$ " und " $\triangle$ " auch " $\wedge$ " gleichmäßig stetig.

b) Ist $0 < r \in \mathbb{R}$ gegeben, so ist $U := \{x \in A : \lambda(x) < r\}$ eine o -Umgebung. Sind dann $x, y \in A$ gegeben mit $x \triangle y \in U$, so folgt wegen $x = (x \wedge y) \vee (x \triangle y)$:

$$\lambda(x) \leq \lambda(x \wedge y) + \lambda(x \triangle y) \leq \lambda(y) + \lambda(x \triangle y),$$

also $\lambda(x) - \lambda(y) \leq r$; aus Symmetriegründen muß dann

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq r \text{ sein.}$$

c) Sind $x, y \in A$, $x \leq y$, so ist $[x, y]$ das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{o\}$ unter der Abbildung

$$A \ni z \mapsto (x \wedge z') \vee (z \wedge y') \in A,$$

welche nach a) stetig ist.

d) Ist $b \in B$, und ist $y \in A$ eine obere Schranke für B , so ist $[b, y]$ eine abgeschlossene Menge, welche dem Filter $\mathcal{F}(B)$ angehört; sie enthält also dessen Häufungspunkt x . Daher ist x die kleinste obere Schranke für B . □

2.23 Definition

Es sei R eine Familie von Riesz-Pseudo-Normen auf E , und es sei T eine translationsinvariante Topologie auf E . Wir sagen, R erzeugt T , in Zeichen: $T = T(R)$, wenn die Familie $\{ \{f \in E : \rho(f) \leq r\}, \rho \in R, 0 < r \in \mathbb{R} \}$ eine Sub-Basis für den o -Umgebungsfilter von T ist.

2.24 Definition

Es sei L eine Familie von Sub-Inhalten auf A , und es sei

τ eine invariante Topologie auf A . Wir sagen, L erzeugt τ , in Zeichen: $\tau = \tau(L)$, wenn die Familie $\{ix \in A: \lambda(x) \leq r, \lambda \in L, 0 < r \in \mathbb{R}\}$ eine Sub-Basis für den o -Umgebungsfilter von τ ist.

Offenbar erzeugt jede Familie von Riesz-Pseudo-Normen auf E (bzw. von Sub-Inhalten auf A) eine lineare, lokal-solide Topologie auf E (bzw. auf A). Umgekehrt wurde von Fremlin gezeigt:

2.25 Satz

- a) Jede lineare, lokal-solide Topologie auf E wird durch die Familie ihrer stetigen Riesz-Pseudo-Normen erzeugt.
- b) Jede Fatou'sche Topologie auf E wird durch die Familie ihrer stetigen Fatou-Pseudo-Normen erzeugt.

Beweis

(s. [FF1], Prop.22C, Thm.23B).

□

2.26 Korollar

- a) Jede lineare, lokal-solide Topologie auf A wird durch die Familie ihrer stetigen Sub-Inhalte erzeugt.
- b) Jede Fatou'sche Topologie auf A wird durch die Familie ihrer stetigen Fatou-Sub-Inhalte erzeugt.

Beweis

Wegen 1.3 dürfen wir o.F. annehmen $A = l(E)$, wobei E die Hauptprojektionseigenschaft und eine starke Einheit besitzt. Wir definieren $\phi: F(E) \rightarrow E$ wie in 2.4. Ist nun τ eine

lineare, lokal-solidé (bzw. Fatou'sche) Topologie auf $P(E)$, so gibt es nach 2.11 b)d)e) eine lineare, lokal-solidé (bzw. Fatou'sche) Topologie T auf E mit $\tau = \delta^{-1}(T)$. Ist R die Familie aller T -stetigen Riesz-Pseudo-Normen (bzw. Fatou-Pseudo-Normen) auf E , so ist $L := \{g \circ \delta: g \in R\}$ eine Familie von Sub-Inhalten (bzw. Fatou-Sub-Inhalten) auf A , wie man mit 2.4a) leicht nachprüft. Nach 2.25 wird T durch R erzeugt, also wird τ durch L erzeugt; erst recht wird τ dann durch die Familie aller τ -stetigen (Fatou-) Sub-Inhalte erzeugt.

2.27 Definition

Für $U \subset A$ bezeichnen wir mit $sk(U)$ den soliden Kern von U , d.h. die größte in U enthaltene solide Menge.

Auch das folgende Lemma ist zu einer von Fremlin bewiesenen Aussage analog, jedoch läßt sich der Übertragungsmechanismus hier nicht einsetzen. Der Beweis verläuft indes fast wörtlich wie in Riesz'schen Räumen; wir verzichten daher auf seine Durchführung.

2.28 Lemma

Es sei τ eine lineare, Lebesgue'sche Topologie auf A , U sei ein o -Umgebung für τ , und es sei $B \subset A$ gegeben mit $B \downarrow o$. Dann ist $B \cap sk(U) \neq \emptyset$.

Beweis

(vgl. [FR1], Thm.24B(c))

□

2.29 Satz

Eine lineare Topologie τ auf A ist Lebesgue'sch genau dann, wenn sie gröber als τ_0 ist.

Beweis

Offenbar ist eine lineare Topologie, welche gröber als τ_0 ist, Lebesgue'sch. Umgekehrt sei τ linear und Lebesgue'sch. Ferner sei $x \in A$ und ein Filter $\mathcal{F}$ auf A mit $\mathcal{F} \xrightarrow{o} x$ gegeben; wir haben zu zeigen, daß $\mathcal{F}$ auch topologisch gegen x konvergiert.

Dazu sei eine o -Umgebung U bezüglich τ gegeben. Da τ linear ist, gibt es eine o -Umgebung V mit $V \Delta V \subset U$.

Wir setzen $B := \{b \in A: [o, b] \in \mathcal{F}\}$

und $C := \{c \in A: [c, 1] \in \mathcal{F}\}$

und haben $B \downarrow x$, $C \uparrow x$. Hieraus folgt $B \wedge x' \downarrow o$, $C' \wedge x \downarrow o$.

Nach 2.28 gibt es dann $b \in B$, $c \in C$ mit $b \wedge x' \in \text{sk}(V)$ und $c' \wedge x \in \text{sk}(V)$.

Für jedes $y \in [c, b]$ ist nun

$y \wedge x' \in [o, b \wedge x'] \subset V$ sowie $y' \wedge x \in [o, c' \wedge x] \subset V$, und

damit $x \Delta y = (y \wedge x') \Delta (y' \wedge x) \in V \Delta V \subset U$, also $y \in x \Delta U$.

Dies zeigt $x \Delta U \supset [c, b] \in \mathcal{F}$. Da U beliebig war, ist $\mathcal{F}$ feiner als der Umgebungsfilter von x , d.h. $\mathcal{F}$ konvergiert bezüglich τ gegen x .

Auch das folgende Lemma besitzt ein Analogon für Riesz'sche Räume (vgl. [FR1], Exc.24L(d)), aber der Beweis verläuft für Boole'sche Algebren anders. Die hier benutzte Beweisidee geht auf die Arbeit [MAH] von Maharam zurück.

2.30 Lemma

A sei σ -vollständig¹⁾ und τ sei eine lineare, Lebesgue'sche Topologie auf A. Dann gibt es eine Lebesgue'sche lineare und lokal-solid Topologie τ' auf A, welche feiner als τ ist.

Beweis

1. Konstruktion

Für $U, V \subset A$ gelten folgende Beziehungen:

- i) $sk(U) \wedge sk(V) = sk(U \wedge V)$
- ii) $sk(U) \Delta sk(V) \subset sk(U \Delta V)$.

i) ist trivial; zum Nachweis von ii) seien $x \in sk(U)$, $y \in sk(V)$ gegeben. Dann gilt für jedes $z \in [0, x \wedge y]$:
 $z = z \wedge (x \Delta y) = (z \wedge x) \Delta (z \wedge y) \in [0, x] \Delta [0, y] \subset U \Delta V$.
 Dies zeigt $[0, x \Delta y] \subset U \Delta V$, also $x \Delta y \in sk(U \Delta V)$.

Ist nun $\mathcal{U}$ der o-Umgebungsfilter für τ , so ist die Familie $\{sk(U) : U \in \mathcal{U}\}$ wegen i) Basis eines Filters $\mathcal{K}$ auf A, und wegen ii) gibt es zu jedem $V \in \mathcal{K}$ ein $V_1 \in \mathcal{K}$ mit $V_1 \Delta V_1 \subset V$. Wie man aus der Theorie der topologischen Gruppen weiß, ist daher $\mathcal{K}$ der o-Umgebungsfilter einer linearen Topologie τ' auf A, und τ' ist lokal-solid und feiner als τ . Bleibt also zu zeigen:

2. Behauptung: τ' ist Lebesgue'sch.

Dazu sei $B \subset A$ gegeben mit $B \downarrow 0$, und wir nehmen an, o läge nicht im Abschluß $\bar{A}$ von A bezüglich τ' . Nach Kon-

¹⁾ Es genügt hier vorauszusetzen, daß jede disjunkte Folge in A gegen o ordnungskonvergent ist. Boole'sche Algebren mit dieser Eigenschaft werden z.B. bei [PR3] betrachtet.

struktion von $\hat{\tau}'$ gibt es dann eine τ -o-Umgebung U mit $B \cap \text{sk}(U) = \emptyset$, und weiter gibt es eine τ -o-Umgebung V mit $V \triangle V \subset U$. Wir konstruieren induktiv zwei Folgen $(x_n)_n, (y_n)_n$ in A mit folgenden Eigenschaften:

$$x_n \in B, x_{n+1} \leq x_n, y_n \leq x_n, y_n \notin U, x_{n+1} \wedge y_n \in V \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wir wählen $x_1 \in B$ beliebig. Dann ist $x_1 \notin \text{sk}(U)$, also $[0, x_1] \not\subset U$. Wir wählen $y_1 \leq x_1$ mit $y_1 \notin U$. Sind, für $n \in \mathbb{N}$, x_n und y_n schon konstruiert, so gilt $B \wedge y_n \downarrow 0$, und nach 2.28 gibt es ein $b \in B$ mit $b \wedge y_n \in \text{sk}(V)$. Da B nach unten gerichtet ist, können wir $x_{n+1} \in B$ wählen mit $x_{n+1} \leq x_n, x_{n+1} \leq b$. Dann ist $x_{n+1} \notin \text{sk}(U)$, also $[0, x_{n+1}] \not\subset U$. Wir wählen $y_{n+1} \leq x_{n+1}$ mit $y_{n+1} \notin U$. Dann ist $x_{n+1} \wedge y_n \in [0, b \wedge y_n] \subset V$.

Nun setzen wir, für $n \in \mathbb{N}$: $z_n := y_n \wedge x_n \wedge x_{n+1}'$. Die Folge $(z_n)_n$ ist disjunkt, und aufgrund unserer Voraussetzung über A gibt es eine Folge $(w_n)_n$ in A mit $w_n \downarrow_n 0$ und $z_n \leq w_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir wenden abermals 2.28 an und erhalten ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $w_{n_0} \in \text{sk}(V)$. Für große n ist daher $z_n \in V$, und dann

$$\begin{aligned} y_n &= (y_n \wedge x_n \wedge x_{n+1}') \triangle (y_n \wedge x_{n+1}) \\ &= z_n \vee (y_n \wedge x_{n+1}) \in V \vee V \subset U. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

[1]

Uns ist nicht bekannt, ob τ_0 im allgemeinen lokal-solid ist. Jedenfalls gilt:

2.31 Korollar

Ist A σ -vollständig und τ_0 linear, so ist τ_0 lokal-solid.

Beweis

Direkt aus 2.30 und 2.29. □

Als nächstes geben wir ein hinreichendes Kriterium dafür an, daß τ_{so} lokal-solid ist. Dazu benutzen wir wieder die Ergebnisse aus Abschnitt A. sowie den folgenden Satz, den von Weizsäcker bewiesen hat:

2.32 Satz

Besitzt E die Diagonaleigenschaft, so ist T_{so} lokal-solid.

Beweis

(s. [WE], Satz 2.5)

2.33 Korollar

A sei σ -vollständig und besitze die Diagonaleigenschaft. Dann ist τ_{so} lokal-solid.

Beweis

Nach 1.8 dürfen wir o.E. annehmen $A = P(E)$, wobei E Dedekind- σ -vollständig und universal- σ -vollständig ist und eine schwache Einheit besitzt. Wir definieren $\delta : P(E) \rightarrow E$ wie in 2.4. Wegen 2.18 und 2.32 ist T_{so} lokal-solid, und nach 2.10c)g) ist dann auch $\tau_{so} = \delta^{-1}(T_{so})$ lokal-solid. □

Man erhält einen direkten Beweis von 2.33, wenn man den bei [WE] geführten Beweis fast wörtlich überträgt. Dabei erweist die σ -Vollständigkeit von A sich als überflüssig.

2.34 Definition

Es sei L eine Familie von Sub-Inhalten auf A . Wir sagen, L trennt die Punkte von A , wenn es zu jedem $0 < x \in A$ ein $\lambda \in L$ gibt mit $\lambda(x) > 0$.

2.35 Definition

Eine Topologie T auf E heißt L-Topologie, wenn sie linear, lokal-solid, Lebesgue'sch und hausdorff'sch ist.

2.36 Definition

Eine Topologie τ auf A heißt L-Topologie, wenn sie linear, lokal-solid, Lebesgue'sch und hausdorff'sch ist.

Über L-Topologien lassen sich sehr starke Aussagen beweisen. Zum Beispiel:

2.37 Satz

Es sei M ein Dedekind-vollständiger und universal-vollständiger Riesz'scher Raum, und T sei eine L-Topologie auf M .

- a) M ist vollständig bezüglich T
- b) Ist E ein weiterer Riesz'scher Raum, S eine L-Topologie auf E und $\varphi : E \rightarrow M$ ein ordnungs-stetiger Riesz-Homomorphismus, so ist φ auch topologisch stetig. Insbesondere gibt es höchstens eine L-Topologie auf M .

Beweis

(s. FR4 , Thm.2.2, Cor.2.6)

Wir setzen nun abermals den Mechanismus aus Abschnitt A. ein.

2.38 Satz

A sei vollständig.

- a) Es gibt höchstens eine L-Topologie auf A.
- b) Ist τ eine L-Topologie auf A, so ist A τ -vollständig, und die Familie aller ordnungs-stetigen Sub-Inhalte trennt die Punkte von A.
- c) Ist L eine Familie ordnungs-stetiger Sub-Inhalte, welche die Punkte von A trennt, so ist $\tau(L)$ eine ("die") L-Topologie auf A.
- d) Ist τ_0 linear, so ist τ_0 eine ("die") L-Topologie.

Beweis

- a) Nach 1.8 und 1.9 dürfen wir o.F. annehmen $A = P(E)$, wobei E Dedekind-vollständig und universal-vollständig ist und eine schwache Einheit e besitzt. Wir definieren $\delta : P(E) \rightarrow E$ wie in 2.4. Ist τ eine L-Topologie auf $P(E)$, so gibt es nach 2.11c)f) eine L-Topologie T auf E mit $\tau = \delta^{-1}(T)$, und die Behauptung folgt aus 2.37b).
Da $\text{Bild}(\delta)$ gemäß 2.10d) abgeschlossen ist, ergibt sich aus 2.37a) zugleich die Vollständigkeitsaussage aus b).
- b) Nach 2.26a) trennt die Familie aller τ -stetigen Sub-Inhalte die Punkte von A, denn τ ist hausdorff'sch. Da τ Lebesgue'sch ist, ist jeder τ -stetige Sub-Inhalt auch ordnungs-stetig, wie man etwa aus 2.29 ersieht.
- c) Dies folgt direkt aus den Definitionen.
- d) Dies folgt aus 2.31. Man hat noch zu beachten, daß eine topologische Gruppe, in der die einpunktigen Mengen abgeschlossen sind, schon hausdorff'sch ist.

2.39 Definition

Ein Sub-Inhalt λ auf A heißt strikt positiv, wenn aus $0 < x \in A$ stets folgt $\lambda(x) > 0$.

Ist A vollständig und trägt A einen strikt positiven, ordnungs-stetigen Sub-Inhalt, so ist A ordnungsseparabel (vgl. 0.3d)). Ist A vollständig und ordnungsseparabel, und trägt A eine L -Topologie τ , so ist $\tau = \tau_0$ und ist metrisierbar (dies wird bei [WL1], S. 107 gezeigt). Wir ergänzen nun diese Aussagen:

2.40 Satz

A sei vollständig und ordnungsseparabel.

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) A trägt einen strikt positiven, ordnungs-stetigen Sub-Inhalt

ii) A trägt eine L -Topologie

iii) τ_0 ist linear

b) Ist eine der Bedingungen aus a) erfüllt, so ist τ_0 die L -Topologie von A , jeder strikt positive, ordnungs-stetige Sub-Inhalt erzeugt sie, und A besitzt die Diagonaleigenschaft.

c) Besitzt A die Diagonaleigenschaft, so ist τ_0 lokal-solid.

Beweis

a) "i) $\Rightarrow$ ii)" ist offensichtlich (vgl. 2.38c)).

"ii) $\Rightarrow$ iii)" wurde in obiger Bemerkung festgestellt.

"iii) $\Rightarrow$ ii)" wurde schon in 2.38d) ausgesagt.

Wir zeigen: "ii) $\Rightarrow$ i) .

Ist τ eine L-Topologie auf A , so ist sie nach obiger Bemerkung metrisierbar. Nach 2.26a) gibt es dann eine abzählbare Familie $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ von Sub-Inhalten, welche τ erzeugt. Nach der Normierung $\lambda_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wird durch

$$\lambda(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \lambda_n(x), \quad x \in A$$

ein Sub-Inhalt definiert, welcher τ erzeugt. Da τ hausdorff'sch ist, ist λ strikt positiv, und da τ Lebesgue'sch ist, ist λ ordnungs-stetig.

b) Die ersten beiden Behauptungen sind nach dem bisher gesagten evident. Der Nachweis der Diagonaleigenschaft findet sich bei [MAH]¹⁾.

c) Dies folgt aus 2.33, denn die Ordnungsseparabilität von A hat $\tau_0 = \tau_{so}$ zur Folge.

2.41 Bemerkung

Zwei der hier offen bleibenden Fragen lassen sich entscheiden, wenn man axiomatische Annahmen macht, welche über das Zermelo-Fraenkel'sche Axiomensystem mit Auswahlaxiom (ZFC) hinausgehen. Wir kürzen ab:

CH : Die Kontinuumshypothese

MA : Martin's Axiom

SH : Die Souslin-Hypothese

(Zur Formulierung von MA und SH vgl. [JE].)

¹⁾ Die dort benutzte Eigenschaft ist für ordnungs-separable Boole'sche Algebren zur Diagonaleigenschaft äquivalent.

a) Setzt man CH voraus, so gilt:

Jede vollständige Boole'sche Algebra, welche die Diagonaleigenschaft besitzt, ist ordnungsseparabel.

Zum Beweis vgl. ([KAN], S.176).

Für den Beweis der obigen Aussage ist CH nicht entbehrlich. Denn (non CH) ist zusammen mit MA konsistent relativ zu ZFC (vgl. [JE]); und ist unter diesen Voraussetzungen X eine Menge mit $\aleph_0 < \text{card}(X) < 2^{\aleph_0}$, so besitzt die Boole'sche Algebra $\mathcal{P}(X)$ die Diagonaleigenschaft (vgl. [FR5]). Vgl. hierzu auch [WL2].

b) Unter der Voraussetzung (non CH) + MA ist SH wahr, daher ist SH konsistent relativ zu ZFC; aber auch (non SH) ist konsistent relativ zu ZFC (vgl. [DE]). Setzt man (non SH) voraus, so gilt:

Es gibt eine vollständige, ordnungsseparable Boole'sche Algebra mit der Diagonaleigenschaft, welche keinen strikt-positiven, ordnungstetigen Sub-Inhalt zuläßt.

Dies wurde bereits 1947 von Maharam bewiesen ([MAH]).

Wir merken noch an: Ist A eine solche Boole'sche Algebra, so ist der Raum $L^0(A)$ (vgl. 1.7) ein Beispiel für einen Dedekind-vollständigen und universal-vollständigen ordnungsseparablen Riesz'schen Raum mit der Diagonaleigenschaft (2.18), der keine L -Topologie zuläßt (2.10).

Wir beschließen diesen Paragraphen mit dem folgenden Satz:

2.42 Satz

E besitze die Projektionseigenschaft. Mit $\mathcal{T}$ bezeichnen wir die Familie aller L-Topologien auf E. Es gilt:

- a) $\mathcal{T}$ ist nicht leer genau dann, wenn es eine L-Topologie auf $P(E)$ gibt.
- b) Ist $T \in \mathcal{T}$, so ist $\mathcal{T} = \langle T \rangle$ und $\mathcal{T}$ ist ein vollständiger Verband.
- c) $\mathcal{T}$ sei nicht leer und T^0 sei die grösste Topologie in $\mathcal{T}$. Es sei

$$\tilde{\Phi} : E \rightarrow L^0(P(E))$$

eine Riesz-Einbettung gemäß 1.18. Dann gibt es auf $L^0(P(E))$ eine eindeutig bestimmte L-Topologie S, und die Abbildung

$$\tilde{\Gamma} : (E, T^0) \rightarrow (L^0(P(E)), S)$$

ist eine topologische Vervollständigung.

Beweis

- a) $\mathcal{T}$ sei nicht leer, und sei $T \in \mathcal{T}$. Wir zeigen: die Familie aller ordnungs-stetigen Sub-Inhalte auf $P(E)$ trennt die Punkte von $P(E)$; daraus folgt mit 2.38c) die Existenz einer L-Topologie auf $P(E)$.

Dazu sei $0 \neq x \in P(E)$ gegeben, und wir nehmen o.F. an $x = [e]$ mit $0 < e \in E$. Die Spur von T auf x ist wieder eine L-Topologie, und e ist eine schwache Einheit für x. Aus 2.10a)f) folgt dann die Existenz einer L-Topologie auf $P(x)$, und nach 2.38b) gibt es einen ordnungs-stetigen Sub-Inhalt λ auf $P(x)$ mit $\lambda(x) > 0$. Dieser läßt sich vermö-

ge $\bar{\lambda}(y) := \lambda(x \sqcap y), y \in P(E)$

zu einem ordnungs-stetigen Sub-Inhalt auf $P(E)$ fortsetzen.

Damit ist die eine Hälfte von a) bewiesen; die andere beweisen wir zusammen mit c).

b) Es sei $T \in \mathcal{T}$. Die Inklusion $\langle T \rangle \subset \mathcal{T}$ ergibt sich aus der Bemerkung im Anschluß an 2.13. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich, falls E eine schwache Einheit besitzt, aus 2.14 und 2.38a). Im allgemeinen Fall ergibt sie sich dann aus der Beobachtung, daß für $h \in E^+$ die Menge $[-h, h]$ in dem Hauptband $[h]$ enthalten ist. Der Rest der Behauptung folgt nun mit 2.15.

c) Nach 1.8b) sind die Boole'schen Algebren $P(E)$ und $P(L^0(P(E)))$ isomorph. Ist also $\mathcal{T}$ nicht leer, so gibt es nach dem bereits bewiesenen Teil von a) eine L-Topologie auf $P(E)$, und da $L^0(P(E))$ eine schwache Einheit besitzt, gibt es nach 2.11c)f) eine L-Topologie S auf $L^0(P(E))$. Die Eindeutigkeit von S und die S -Vollständigkeit von $L^0(P(E))$ ergibt sich aus Fremlin's Resultat 2.37. Da $\text{Bild}(\tilde{\Phi})$ in $L^0(P(E))$ ordnungs-dicht ist, ist $\tilde{\Phi}$ ordnungs-stetig (vgl. [FR1], 17A), und folglich ist $\tilde{\Phi}^{-1}(S)$ eine L-Topologie auf E . Wieder wegen Fremlin's Resultat 2.37b) muß $\tilde{\Phi}^{-1}(S)$ gröber als jede L-Topologie auf E , also gleich T^0 sein. Da $\text{Bild}(\tilde{\Phi})$ in $L^0(P(E))$ ordnungs-dicht und S Lebesgue'sch ist, ist $\text{Bild}(\tilde{\Phi})$ auch bezüglich S dicht in $L^0(P(E))$. Damit ist c) bewiesen; da wir zur Konstruktion von $\tilde{\Phi}^{-1}(S)$

nur die Existenz einer L-Topologie auf $P(E)$ benutzt haben, ist auch der noch verbleibende Teil von a) bewiesen. □

Die Erkenntnis, daß L-Topologien auf vollständigen Boole'schen Algebren eindeutig bestimmt sind (2.38a)), ist nicht neu. Diese Aussage wird bei [SA] (ohne Beweis) angegeben; sie folgt auch aus einem Resultat von Amemiya und Mori ([AM]) über Topologien auf vollständigen Verbänden. Das gleiche Resultat hat für Dedekind-vollständige Riesz'sche Räume zur Folge, daß je zwei L-Topologien auf den ordnungs-beschränkten Mengen übereinstimmen. Durch 2.42b) wird dies auf Räume mit der Projektionseigenschaft verallgemeinert.

3. Inhalte und lokal-konkave Topologien

A. Inhaltserzeugte Topologien auf Boole'schen Algebren

3.1 Vereinbarung

In diesem Abschnitt bezeichne A eine Boole'sche Algebra.

3.2 Definition

Eine lineare, lokal-solide Topologie τ auf A heißt pseudo-Lebesgue'sch, wenn jede disjunkte Folge in A bezüglich τ gegen 0 konvergiert.

Ein Sub-Inhalt ν auf A heißt pseudo-Lebesgue'sch, wenn die von ν erzeugte Topologie pseudo-Lebesgue'sch ist.

Offenbar ist in einer σ -vollständigen Boole'schen Algebra jede Lebesgue'sche Topologie auch pseudo-Lebesgue'sch.

In 2.38b) wird eine Aussage über den Zusammenhang zwischen Ordnungs-Vollständigkeit und topologischer Vollständigkeit gemacht. Wir ergänzen diese durch eine Aussage in umgekehrter Richtung:

3.3 Lemma

Es sei τ eine hausdorff'sche, pseudo-Lebesgue'sche Topologie auf A , so daß A topologisch vollständig ist. Dann ist A eine vollständige Boole'sche Algebra und τ ist Lebesgue'sch.

Beweis

Ist $B \downarrow$ in A gegeben, so ist der Filter $\mathcal{F}(B \downarrow)$ ein Cauchy-Filter. Denn andernfalls gäbe es eine 0-Umgebung U , so daß

man induktiv eine antitone Folge $(x_n)_n$ in B konstruieren kann mit der Eigenschaft $x_n \searrow x_{n+1} \notin U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das aber kann nicht sein, weil die Folge $(x_n \triangle x_{n+1})_n$ disjunkt ist.

Da A τ -vollständig ist, existiert $x := \lim \mathcal{F}(B_\downarrow) \in A$. Nach 2.22d) folgt $x = \inf B$. Dies zeigt zugleich beide Behauptungen des Lemmas. □

Ist τ eine hausdorff'sche, lineare, lokal-solid-e Topologie auf A , so sind die Boole'schen Operationen gleichmäßig stetig. Die topologische Vervollständigung $(\tilde{A}, \tilde{\tau})$ von (A, τ) ist daher in natürlicher Weise eine Boole'sche Algebra. Ist L die Familie aller τ -stetigen Sub-Inhalte auf A , so läßt sich jedes $\lambda \in L$ eindeutig zu einem $\tilde{\tau}$ -stetigen Sub-Inhalt $\tilde{\lambda}$ auf $\tilde{A}$ fortsetzen (2.22b)). Da τ durch L erzeugt wird, wird $\tilde{\tau}$ durch $\tilde{L} := \{\tilde{\lambda} : \lambda \in L\}$ erzeugt, und daher ist $\tilde{\tau}$ linear und lokal-solid. Ist nun τ sogar pseudo-Lebesgue'sch, so läßt sich mehr sagen.

3.4 Satz

Es sei τ eine hausdorff'sche, pseudo-Lebesgue'sche Topologie auf A ; $(\tilde{A}, \tilde{\tau})$ sei die topologische Vervollständigung von (A, τ) . Dann ist $\tilde{A}$ eine vollständige Boole'sche Algebra und $\tilde{\tau}$ ist eine L -Topologie.

Beweis

Im Hinblick auf 3.3 bleibt nur zu zeigen, daß mit τ auch $\tilde{\tau}$ pseudo-Lebesgue'sch ist. Anderenfalls gibt es eine dis-

junkte Folge (x_n) in $\tilde{A}$ und einen $\tilde{\tau}$ -stetigen Sub-Inhalt $\tilde{\lambda}$ auf $\tilde{A}$ mit $\tilde{\lambda}(x_n) \geq 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Da A in $\tilde{A}$ dicht ist, gibt es eine Folge $(y_n)_n$ in A mit der Eigenschaft

$$\tilde{\lambda}(x_n \Delta y_n) \leq 2^{-(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann wird durch $z_1 := y_1$, $z_n := y_n \wedge y'_{n-1} \wedge \dots \wedge y'_1$, $n > 1$, eine disjunkte Folge $(z_n)_n$ in A definiert, und da die Einschränkung von $\tilde{\lambda}$ auf A τ -stetig ist, folgt $\lim_n \tilde{\lambda}(z_n) = 0$.

Nun ergibt sich aus

$$\begin{aligned} x_n &\leq z_n \vee (x_n \wedge z'_n) \\ &= z_n \vee (x_n \wedge y'_n) \vee (x_n \wedge y_{n-1}) \vee \dots \vee (x_n \wedge y_1) \\ &\leq z_n \vee (x_n \wedge y'_n) \vee (x'_{n-1} \wedge y_{n-1}) \vee \dots \vee (x'_1 \wedge y_1) \\ &\leq z_n \vee \sup \{x_i \Delta y_i : 1 \leq i \leq n\}, \quad n > 1 \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\tilde{\lambda}(x_n) \leq \tilde{\lambda}(z_n) + \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}(x_i \Delta y_i) \leq \tilde{\lambda}(z_n) + \frac{1}{2}, \quad n > 1.$$

Für große Werte von n ist dann $\tilde{\lambda}(x_n) < 1$, was nicht sein kann. □

Die Tatsache, daß $\tilde{A}$ eine vollständige Boole'sche Algebra ist, wird bei [WL1] ohne Beweis angegeben. Wir haben den Beweis hier durchgeführt, weil wir auch an der zweiten Aussage von 3.4 interessiert sind.

3.5 Definition

Ein Sub-Inhalt λ auf A heißt Inhalt, wenn er additiv ist, d.h. aus $x \wedge y = 0$ stets folgt $\lambda(x \vee y) = \lambda(x) + \lambda(y)$.

3.6 Vereinbarung

In diesem Abschnitt bezeichne M die Familie aller Inhalte auf A .

Ist $\mu \in M$, und ist $(x_n)_n$ eine disjunkte Folge in A ,
so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(x_n) \leq \mu(1),$$

insbesondere also $\lim_n \mu(x_n) = 0$. Daher ist die Topologie

$\mathcal{L}(M)$ pseudo-Lebesgue'sch, und damit ist auch jede gröbere
lineare und lokal-solide Topologie pseudo-Lebesgue'sch.

Nicht ganz so trivial ist der nachfolgende Satz 3.8, zu dessen
Vorbereitung wir noch ein Lemma benötigen.

3.7 Lemma

Es sei B eine weitere Boole'sche Algebra, und B sei vollständig

Es sei $f : B \rightarrow A$ ein ordnungs-stetiger Boole'scher Homomor-
phismus. Dann ist $\text{Bild}(f)$ abgeschlossen bezüglich der Ordnungs-
topologie $\mathcal{T}_0$ von A .

Beweis

Es sei $a \in A$, $\mathcal{F}$ ein Filter auf A mit $\text{Bild}(f) \in \mathcal{F} \xrightarrow{0} a$.

Wir haben zu zeigen: $a \in \text{Bild}(f)$.

Wir setzen $C := \{c \in A : [0, c] \in \mathcal{F}\},$

$D := \{d \in A : [d, 1] \in \mathcal{F}\}$

und haben $\inf C = a = \sup D$. Wir definieren weiter

$$\varphi : A \ni x \mapsto \sup f^{-1}([0, x]) \in B.$$

Wir setzen $b := \inf \varphi(C)$ und zeigen $f(b) = a$, womit die
Behauptung folgt.

Aus der Ordnungs-Stetigkeit von f folgt zunächst

$$f(\varphi(x)) \leq x \text{ für } x \in A, \text{ und dann}$$

$$f(b) = \inf f(\varphi(C)) \leq \inf C = a.$$

Sind $c \in C$, $d \in D$ gegeben, so ist $[d, c] \cap \text{Bild}(f) \neq \emptyset$, insbesondere gibt es ein $x \in B$ mit $d \leq f(x) \leq c$. Dann ist $x \in f^{-1}([0, c])$, und somit $x \leq \varphi(c)$. Wir erhalten $d \leq f(x) \leq f(\varphi(c))$. Da c und d beliebig waren, folgt

$$f(b) = \inf f(\varphi(C)) \geq \sup D = a,$$

also $f(b) = a$.

3.8 Satz

Es sei τ eine lineare, lokal-solid-e Topologie auf A , welche gröber als $\tau(M)$ ist. Dann gibt es eine Menge $K \subset M$, welche τ erzeugt.

Beweis

Wir führen den Beweis in vier Schritten.

1. Behauptung: Ist μ ein $\tau(M)$ -stetiger Sub-Inhalt, so gibt es ein $u \in M$, so daß μ auch $\tau(u)$ -stetig ist.

Es gibt eine Folge $(\mu_n)_n$ in M und eine Folge $(r_n)_n$ in $\mathbb{R}$ mit $0 < r_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu_n(1) = 1, \quad x \in A: \quad \mu_n(x) \leq r_n \quad x \in A: \quad \mu(x) \leq \frac{1}{n}.$$

Dann ist $\mu := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mu_n \in M$. Ist nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben, so haben wir für $r := 2^{-n_0} \cdot r_{n_0}$:

$$x \in A: \quad \mu(x) \leq r \quad x \in A: \quad \mu(x) \leq \frac{1}{n_0}.$$

Daher ist μ stetig bezüglich $\tau(u)$.

2. Behauptung: Ist $u \in M$ und ist μ ein strikt positiver, $\tau(u)$ -stetiger Sub-Inhalt, so gibt es ein $\nu \in M$ mit der Eigenschaft $\tau(\nu) = \tau(u)$.

Wir setzen zur Abkürzung $\sigma_1 := \tau(\mu)$, $\sigma_2 := \tau(\lambda)$ und bezeichnen mit $(A_1, \tilde{\sigma}_1)$ bzw. $(A_2, \tilde{\sigma}_2)$ die topologische Vervollständigung von (A, σ_1) bzw. (A, σ_2) . Nach 3.4 sind A_1, A_2 vollständige Boole'sche Algebren und $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ sind L-Topologien. μ läßt sich eindeutig fortsetzen zu einem $\tilde{\sigma}_1$ -stetigen Inhalt $\tilde{\mu}$ auf A_1 , und λ läßt sich eindeutig fortsetzen zu einem $\tilde{\sigma}_2$ -stetigen Sub-Inhalt $\tilde{\lambda}$ auf A_2 . $\tilde{\mu}$ bzw. $\tilde{\lambda}$ ist strikt positiv und ordnungsstetig; daher ist $\tilde{\sigma}_1$ bzw. $\tilde{\sigma}_2$ die Ordnungstopologie auf A_1 bzw. A_2 (2.40b)).

Die identische Abbildung $(A, \sigma_1) \rightarrow (A, \sigma_2)$ ist ein gleichmäßig stetiger Boole'scher Homomorphismus und läßt sich daher eindeutig fortsetzen zu einem gleichmäßig stetigen Boole'schen Homomorphismus $f : (A_1, \tilde{\sigma}_1) \rightarrow (A_2, \tilde{\sigma}_2)$, und f ist dann ordnungsstetig (2.22d)). Nach 3.7 ist dann $\text{Bild}(f)$ in A_2 abgeschlossen bezüglich $\tilde{\sigma}_2$; da $\text{Bild}(f)$ die bezüglich $\tilde{\sigma}_2$ dichte Teilmenge A enthält, ist $\text{Bild}(f) = A_2$, d.h. f ist surjektiv. $\text{Kern}(f)$ ist ein Band in A_1 , hat also die Gestalt $\text{Kern}(f) = [0, a]$ mit $a \in A_1$. Wir erhalten nun eine Kette von Ordnungs-Isomorphismen:

$$[0, a'] \cong A_1 / [0, a] = A_1 / \text{Kern}(f) \cong \text{Bild}(f) = A_2.$$

Die Einschränkung von $\tilde{\mu}$ auf $[0, a']$ ist ein strikt positiver, ordnungsstetiger Inhalt und induziert daher über den obigen Isomorphismus einen strikt positiven, ordnungsstetigen Inhalt $\tilde{\nu}$ auf A_2 . Dieser erzeugt $\tilde{\sigma}_2$ (2.40b)), und die Einschränkung ν von $\tilde{\nu}$ auf A ist ein Inhalt, welcher σ_2 erzeugt.

3. Behauptung: Ist $\mu \in M$ und λ ein (nicht notwendig strikt positiver) $\tau(\mu)$ -stetiger Sub-Inhalt, so gibt es ein $\nu \in M$ mit $\tau(\nu) = \tau(\lambda)$.

Wir bilden das Ideal $B := \{x \in A : \lambda(x) = 0\}$ und dann die Faktoralgebra $C := A/B$. Sei $\pi : A \rightarrow C$ die kanonische Projektion. Dann wird durch $\bar{\lambda}(\pi(x)) := \lambda(x)$, $x \in A$, ein strikt positiver Sub-Inhalt $\bar{\lambda}$ auf C wohldefiniert. Wir setzen

$$\bar{\mu}(y) := \inf\{\mu(x) : x \in A, \pi(x) = y\}, y \in C;$$

eine einfache Rechnung zeigt, daß $\bar{\mu}$ ein Inhalt auf C ist, und daß $\bar{\lambda}$ stetig bezüglich $\tau(\bar{\mu})$ ist.

Nach Behauptung 2. gibt es nun einen Inhalt $\bar{\nu}$ auf C mit der Eigenschaft $\tau(\bar{\nu}) = \tau(\bar{\lambda})$. Dann ist $\nu := \bar{\nu} \circ \pi$ ein Inhalt auf A mit $\tau(\nu) = \tau(\lambda)$.

4. Die Behauptung des Satzes ist nun leicht zu zeigen: Die Familie L aller τ -stetigen Sub-Inhalte erzeugt τ (2.26a)). Zu jedem $\lambda \in L$ gibt es gemäß Behauptung 1. ein $\mu \in M$, so daß λ bezüglich $\tau(\mu)$ stetig ist, und dann gemäß Behauptung 3. ein $\nu \in M$, so daß $\tau(\nu) = \tau(\lambda)$ gilt. Zu jedem $\lambda \in L$ wählen wir ein solches $\nu \in M$ und erhalten eine Menge $K \subseteq M$, welche das gewünschte leistet.

□

Von Herer und Christensen wurde 1975 ein Beispiel für eine metrisierbare, lineare, lokal-solidale Topologie auf einer Boole'schen Algebra angegeben, welche keine stetigen Inhalte (außer dem trivialen) zuläßt ($[HC]$). Eine solche

Topologie ist nach unserem Satz nicht mit $\tau(M)$ vergleichbar. Offen bleibt die Frage, ob jede pseudo-Lebesgue'sche Topologie gröber als $\tau(M)$ ist. Wie sich sogleich herausstellen wird, ist diese Frage äquivalent zu einem alten, von Maharam 1947 aufgeworfenen Problem ([MAH]).

3.9 Satz

Ist eine der folgenden Aussagen wahr, so sind es auch die anderen:

- a) Es gibt eine (nicht-triviale) vollständige Boole'sche Algebra, welche einen strikt positiven, ordnungsstetigen Sub-Inhalt, aber keinen strikt positiven ordnungsstetigen Inhalt zuläßt.
- b) Es gibt eine Boole'sche Algebra A und eine pseudo-Lebesgue'sche Topologie auf A , welche nicht gröber als $\tau(M)$ ist.
- c) Es gibt eine (nicht-triviale) freie Boole'sche Algebra F und einen strikt positiven, pseudo-Lebesgue'schen Sub-Inhalt λ auf F , so daß jeder $\tau(\lambda)$ -stetige Inhalt identisch gleich 0 ist.

Beweis

c) $\Rightarrow$ b): trivial nach 3.8.

b) $\Rightarrow$ a): Nach 2.26a) gibt es einen τ -stetigen Sub-Inhalt λ , welcher nicht $\tau(M)$ -stetig ist. Wir dürfen o.E. annehmen, daß λ strikt positiv ist (sonst faktorisieren wir nach dem Ideal $\lambda^{-1}(\{0\})$). Bezeichnen wir mit $(\tilde{A}, \tilde{\tau})$ die

topologische Vervollständigung von $(A, \tau(\lambda))$, so ist $\tilde{A}$ eine vollständige Boole'sche Algebra und $\tilde{\tau}$ eine L-Topologie auf $\tilde{A}$ (3.4). $\tilde{A}$ trägt einen strikt positiven, ordnungs-stetigen Sub-Inhalt, nämlich die stetige Fortsetzung $\tilde{\lambda}$ von λ . Wäre $\tilde{\mu}$ ein strikt positiver, ordnungs-stetiger Inhalt auf $\tilde{A}$, so würde er $\tilde{\tau}$ erzeugen (2.38c)), und $\tilde{\lambda}$ wäre insbesondere $\tau(\tilde{\mu})$ -stetig. Dann aber wäre λ stetig bezüglich $\tau(\mu)$, erst recht also bezüglich $\tau(M)$, was nicht der Fall ist.

a) $\Rightarrow$ c): A besitze die in a) genannten Eigenschaften. Dann können wir erreichen, daß A zusätzlich folgende Eigenschaften besitzt:

1. Jeder ordnungs-stetige Inhalt auf A ist identisch gleich 0.
2. A ist homogen, d.h. für jedes $0 < x \in A$ hat die Ordnungstopologie auf $[0, x]$ das gleiche Gewicht.

Zu 1.: Die Menge B aller $x \in A$, für welche die Boole'sche Algebra $[0, x]$ einen strikt positiven, ordnungs-stetigen Inhalt zuläßt, ist ein σ -Ideal in A, und da A ordnungs-separabel ist (vgl. die Bemerkung nach 2.39), ist B sogar ein Band, hat also die Gestalt $B = [0, b]$ mit $b \in A$. Nach Voraussetzung ist $b < 1$; man gehe über zur Boole'schen Algebra $[0, b']$.

Zu 2.: Wegen 1. ist A atomlos, und dann gibt es eine disjunkte Familie $(x_i: i \in I)$ in A mit $\sup \{x_i: i \in I\} = 1$, so daß für jedes $i \in I$ die Boole'sche Algebra $[0, x_i]$ homogen ist (vgl. [W11], S.82). Man gehe über zu einer dieser Algebren.

Aus der Strukturtheorie für vollständige Boole'sche Algebren weiß man, daß jede homogene, vollständige Boole'sche Algebra A eine freie Unter algebra enthält, welche bezüglich der Ordnungstopologie von A dicht ist (vgl. [WL1], S.198). Sei also F eine solche, und sei λ die Einschränkung auf F eines strikt positiven, ordnungsstetigen Sub-Inhalts $\tilde{\lambda}$ auf A (welcher nach Voraussetzung existiert). Da $\tilde{\lambda}$ die Ordnungstopologie τ_0 auf A erzeugt (2.40b)), ist (A, τ_0) die topologische Vervollständigung von $(F, \tau(\lambda))$. Jeder $\tau(\lambda)$ -stetige Inhalt auf F läßt sich dann zu einem τ_0 -stetigen, also ordnungsstetigen Inhalt auf A fortsetzen, muß also identisch gleich 0 sein. $\square$

3.10 Definition

Eine Abbildung $\mu : A \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ heißt Maß auf A , wenn gilt:

- i) $\mu(x) \geq 0$ für $x \in A$ und $\mu(0) = 0$
- ii) Für $x, y \in A$ folgt aus $x \wedge y = 0$ stets $\mu(x \vee y) = \mu(x) + \mu(y)$
- iii) Ist $(x_n)_n$ eine Folge in A mit $x_n \uparrow_n x \in A$, so gilt

$$\mu(x) = \sup\{\mu(x_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ein Maß μ auf A heißt strikt positiv, wenn aus $0 < x \in A$ stets folgt $\mu(x) > 0$.

Ein Maß μ auf A heißt semi-finit, wenn es zu jedem $x \in A$ mit $\mu(x) = \infty$ ein $y \in A$ gibt mit $y \leq x$ und $0 < \mu(y) < \infty$.

Zum Schluß dieses Abschnitts geben wir zwei Bedingungen an eine vollständige Boole'sche Algebra A an, die zur Existenz eines strikt positiven, semi-finiten Maßes auf A äquivalent sind.

3.11 Satz

A sei vollständig. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) A trägt ein strikt positives, semi-finites Maß.
- b) Die Familie aller ordnungs-stetigen Inhalte auf A trennt die Punkte von A.
- c) A trägt eine L-Topologie, welche gröber als $\tau(M)$ ist.

Beweis

a) $\Rightarrow$ b): Ist μ ein strikt positives, semi-finites Maß auf A, und hat $y \in A$ die Eigenschaft $\mu(y) < \infty$, so wird durch

$$\nu(x) := \mu(x \cap y), \quad x \in A$$

ein ordnungs-stetiger Inhalt ν auf A definiert (s. [FR1], 510b)). Die Familie aller dieser Inhalte trennt also bereits die Punkte von A.

b) $\Rightarrow$ a): Mit dem Lemma von Zorn erhält man eine Familie $\{(x_i, \nu_i) : i \in I\}$ von Paaren mit folgenden Eigenschaften:

- i) $\{x_i : i \in I\}$ ist eine disjunkte Menge in A.
- ii) Für jedes $i \in I$ ist ν_i ein ordnungs-stetiger Inhalt auf A, welcher auf $[0, x_i]$ strikt positiv und auf $[0, x_i']$ identisch gleich 0 ist.
- iii) Die Familie ist maximal bezüglich der in i) und ii) genannten Eigenschaften.

Nach Voraussetzung b) hat die Maximalität dieser Familie zur Folge, daß $\sup \{x_i : i \in I\} = 1$ ist. Nun wird durch

$$\mu(x) := \sum_{i \in I} \nu_i(x \wedge x_i), \quad x \in A$$

ein strikt positives, semi-finites Maß definiert.

b) $\rightarrow$ c): Dies folgt sofort aus 2.38c).

c) $\rightarrow$ b): Dies folgt sofort aus 3.8.

—
—

B. Riesz'sche Räume mit lokal-konkaven Topologien und ihre maßtheoretische Darstellung

3.12 Vereinbarung

In diesem Abschnitt bezeichne E einen Riesz'schen Raum.

3.13 Definition

Eine solide Teilmenge B von E heißt konkav, wenn die Menge $E^+ \setminus B$ konvex ist.

Eine lineare Topologie auf E heißt lokal-konkav, wenn sie eine O -Umgebungsbasis aus konkaven Mengen besitzt.

3.14 Lemma

Es sei T eine lineare und lokal-solide Topologie auf E .

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) T ist lokal-konkav.
- b) Ist $G \subset E^+$ und $0 \notin \bar{G}$, so ist $0 \notin \overline{\text{co}(G)}$.

Beweis

a) $\Rightarrow$ b): Dies folgt direkt aus den Definitionen.

b) $\Rightarrow$ a): Sei U eine beliebige O -Umgebung. Wir setzen $G := E^+ \setminus U$ und haben $0 \notin \bar{G}$, nach Voraussetzung also auch $0 \notin \overline{\text{co}(G)}$. Nun setzen wir

$$V := \{f \in E: [-|f|, |f|] \cap \text{co}(G) = \emptyset\}.$$

Sei W eine solide O -Umgebung mit $W \cap \text{co}(G) = \emptyset$. Ist $f \in W$, so ist $[-|f|, |f|] \cap \text{co}(G) \subset W \cap \text{co}(G) = \emptyset$, also $f \in V$. Dies zeigt $W \subset V$, und damit, daß V eine O -Umgebung ist. Wir zeigen noch, daß V konkav ist und sind dann fertig.

Dazu seien $f, g \in E^+ \setminus V$ sowie $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$, gegeben. Nach Definition von V gibt es $f_1 \in [-f, f]$ und $g_1 \in [-g, g]$ mit $f_1, g_1 \in \text{co}(G)$; es folgt

$$rf_1 + (1-r)g_1 \in \text{co}(G).$$

Weiter haben wir

$r(-f) + (1-r)(-g) \leq rf_1 + (1-r)g_1 \leq rf + (1-r)g$,
also $rf_1 + (1-r)g_1 \in [-(rf + (1-r)g), rf + (1-r)g]$, und
nach Definition von V dann $rf + (1-r)g \in E^+ \setminus V$. □

3.15 Definition

Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wir bezeichnen mit $L^0(\mu)$ den Riesz'schen Raum aller μ -Äquivalenzklassen Σ -meßbarer reeller Funktionen.

Bei [WE¹] wurde 1972 gezeigt, daß die Ordnungstopologie auf dem Raum $L^0(\mu)$, wo μ ein endliches Maß ist, die Eigenschaft b) aus 3.14 besitzt.

3.16 Beispiel

Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum mit endlichem Maß μ , und es sei $p \in \mathbb{R}^+$. Für $f \in L^0(\mu)$ setzen wir

$$\vartheta_p(f) := \begin{cases} \int \frac{|f|}{1+|f|} d\mu & \text{falls } p = 0 \\ \int |f|^p d\mu & \text{falls } 0 < p \leq 1 \\ \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{falls } 1 < p. \end{cases}$$

Weiter setzen wir $L^p(\mu) := \{f \in L^0(\mu) : \vartheta_p(f) < \infty\}$.

$L^p(\mu)$ ist ein Ideal in $L^0(\mu)$, und die Einschränkung von ϑ_p auf $L^p(\mu)$ ist eine Riesz-Pseudo-Norm; für $p \geq 1$ sogar eine Riesz-Norm. Wir zeigen:

- a) Für $0 \leq p \leq 1$ ist die von $\mathcal{J}_p$ auf $L^p(\mu)$ erzeugte Topologie lokal-konkav.
- b) Für $1 < p$ ist die von $\mathcal{J}_p$ auf $L^p(\mu)$ erzeugte Topologie nicht lokal-konkav, wenn μ nicht rein atomar ist.

Beweis

a) Die Abbildung $\mathbb{R}^+ \ni r \mapsto \frac{r}{1+r} \in \mathbb{R}^+$ bzw.

$$\mathbb{R}^+ \ni r \mapsto r^p \in \mathbb{R}^+ \quad (0 < p \leq 1)$$

ist konkav. Daher gilt für $0 \leq f, g \in L^p(\mu)$ ($0 \leq p \leq 1$) und $0 < r < 1$:

$$\mathcal{J}_p(rf + (1-r)g) \geq r \mathcal{J}_p(f) + (1-r) \mathcal{J}_p(g).$$

Dies zeigt, daß für jedes $0 < s \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{f \in L^p(\mu) : f \geq 0, \mathcal{J}_p(f) \geq s\}$$

konvex ist, und damit die Behauptung.

b) Wir zeigen, daß die Bedingung b) aus 3.14 verletzt ist.

Auf Grund der Voraussetzung über μ dürfen wir o.E. annehmen, daß es eine μ -atomlose Menge $B \in \Sigma$ mit $\mu(B) = 1$ gibt.

Wir setzen $G := \{f \in L^p(\mu) : f \geq 0, \mathcal{J}_p(f) \geq 1\}$

und haben offenbar $0 \notin \bar{G}$. Nun sei $0 < s \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $n^{\frac{1-p}{p}} < s$ ist. Es gibt eine Partition $(B_1, \dots, B_n)$ von B , so daß für $i = 1, \dots, n$ gilt

$\mu(B_i) = \frac{1}{n}$. Wir setzen $f_i := n^{1/p} \chi_{B_i}$ und haben $\mathcal{J}_p(f_i) = 1$, also $f_i \in G$ für $i = 1, \dots, n$.

Nun folgt $f := \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f_i \in \text{co}(G)$ und $\mathcal{J}_p(f) = n^{(1-p)/p} < s$.

Da s beliebig war, ergibt sich $0 \in \overline{\text{co}(G)}$.

Das folgende Lemma ist der Schlüssel zur Ausnutzung des Begriffs der lokal-konkaven Topologie:

3.17 Lemma

Auf E seien zwei lineare Topologien T und S gegeben, T gröber als S , T lokal-konkav und S lokal-konvex. Dann gibt es zu jeder T - O -Umgebung U eine S -stetige, positive Linearform φ auf E mit $\{f \in E: \varphi(|f|) < 1\} \subset U$.

Beweis

Wir können die gegebene T - O -Umgebung o.E. als konkav voraussetzen. Es gibt eine absolut-konvexe S - O -Umgebung V mit $V \subset U$. Wir setzen $B := V - E^+$ und $G := E^+ \setminus U$. B und G sind beide konvex und O liegt im S -Inneren von B ; wir zeigen: $B \cap G = \emptyset$. Anderenfalls gibt es $f \in V$, $g \in E^+$ mit $f - g \in G$; es folgt $0 \leq f - g \leq f \in V \subset U$, und weil U solid ist, hat dies $f - g \in U$ zur Folge. Dies ist aber wegen $G \cap U = \emptyset$ nicht möglich.

Weiter dürfen wir o.E. $G \neq \emptyset$ annehmen, denn andernfalls ist $U = E$ und die Aussage des Lemmas ist trivial. Der Satz von Hahn-Banach liefert nun eine S -stetige Linearform φ und ein $r \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$B \subset \{f \in E: \varphi(f) \leq r\}, \quad G \subset \{f \in E: \varphi(f) \geq r\}.$$

Da O im S -Inneren von B liegt, muß $r > 0$ sein, und wir können zu $r = 1$ normieren.

Für $f \in E^+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $-nf \in -E^+ \subset B$, also $\varphi(-nf) \leq 1$, und damit $\varphi(f) \geq \frac{1}{n}$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, muß $\varphi(f) \geq 0$ sein, und die Positivität von φ ist gezeigt.

Ist $f \in E$ mit $\varphi(|f|) < 1$ gegeben, so ist $|f| \notin G$, also $|f| \in U$, und damit $f \in U$. Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Als erste Anwendung erhalten wir:

3.18 Satz

Es sei T eine lineare Topologie auf E . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) T wird durch eine Familie von Riesz-Seminormen¹⁾ erzeugt, welche auf E^+ additiv sind.
- b) T ist lokal-konvex und lokal-konkav.

Beweis

a) $\Rightarrow$ b): Ist ϱ eine Riesz-Seminorm, welche auf E^+ additiv ist, so ist für $0 < r \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f \in E: \varrho(f) < r\}$ konvex und konkav.

b) $\Rightarrow$ a): Ist φ eine T -stetige positive Linearform auf E , so wird durch $\varrho(f) := \varphi(|f|)$ eine T -stetige Riesz-Seminorm auf E erklärt, welche auf E^+ additiv ist. Die Behauptung folgt daher aus 3.17 mit $S = T$. $\square$

Für lokal-solides T ist die Aussage a) auch äquivalent dazu, daß jede gleichgradig stetige Teilmenge von E' in E' ordnungs-beschränkt ist; dies ist mit Hilfe des Bipolarrensatzes leicht einzusehen. Vgl. hierzu auch [FR6].

¹⁾ Eine Riesz-Seminorm ist eine positiv-homogene Riesz-Pseudo-Norm.

2.19 Lemma

Es sei T eine lokal-konkave Topologie auf E , und es sei $H \uparrow \subset E^+$. Dann ist die grösste Topologie in $\langle T \rangle_H$ (vgl. 2.15) ebenfalls lokal-konkav.

Beweis

Es sei $h \in H$ und $\mathcal{K}_h$ die in 2.15b) definierte Abbildung. Nun seien $f, g \in E^+$ und $0 < r, s < 1$ mit $r + s = 1$ gegeben. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_h(rf + sg) &= (rf + sg) \wedge h \\ &\geq ((rf + sg) \wedge (rh + sg)) \wedge ((rh + sh) \wedge (rf + sh)) \\ &= (rf \wedge rh + sg) \wedge (rh \wedge rf + sh) \\ &= rf \wedge rh + sg \wedge sh \\ &= r(f \wedge h) + s(g \wedge h) \\ &= r\mathcal{K}_h(f) + s\mathcal{K}_h(g). \end{aligned}$$

Für eine konkave Menge B ist daher auch die Menge $\mathcal{K}_h^{-1}(B)$ konkav. Die Behauptung folgt damit aus 2.15b). □

Der folgende Satz stellt nun die Beziehung zu den Überlegungen aus Abschnitt A. her.

3.20 Satz

E besitze die Hauptprojektionseigenschaft, e sei eine starke Einheit für E , und $\{ : P(E) \rightarrow E$ wie in 2.4 definiert. Ferner sei eine lineare, lokal-solidale Topologie τ auf $P(E)$ gegeben; wir bezeichnen die grösste Topologie in $\mathcal{T}(\tau)$ mit $T^0(\tau)$, die feinste mit $T^\infty(\tau)$ (vgl. 2.16). Mit diesen Bezeichnungen gilt:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- i) τ wird durch eine Familie von Inhalten erzeugt.
- ii) $T^0(\tau)$ ist lokal-konkav.
- iii) Es gibt eine lokal-konkave Topologie in $\mathcal{V}(\tau)$.
- iv) Es gibt eine Topologie in $\mathcal{V}(\tau)$, welche zugleich lokal-konvex und lokal-konkav ist.

b) Wenn es eine lokal-konvexe Topologie in $\mathcal{V}(\tau)$ gibt, dann ist $T^\infty(\tau)$ lokal-konvex.

c) Wenn es eine hausdorff'sche, lokal-konvexe Topologie in $\mathcal{V}(\tau)$ gibt, dann gibt es eine hausdorff'sche, lineare, lokal-solide Topologie σ auf $P(E)$, welche gröber als τ ist und durch eine Familie von Inhalten erzeugt wird.

Beweis

a) "iv) $\Rightarrow$ iii)": Dies ist trivial.

"iii) $\Rightarrow$ ii)": Dies folgt mit 2.14a) aus 3.19.

"ii) $\Rightarrow$ i)": Da e eine starke Einheit für E ist, gibt es eine lokal-konvexe Topologie S auf E , welche feiner als $T^0(\tau)$ ist, nämlich die, welche durch die Minkowski-Norm der Menge $[-e, e]$ erzeugt wird. Jede positive Linearform α auf E induziert einen Inhalt $\alpha \circ \delta$ auf $P(E)$, und daher zeigt 3.17, daß τ gröber als die von allen Inhalten auf $P(E)$ erzeugte Topologie ist. Die Behauptung folgt dann aus 3.8.

"i) $\Rightarrow$ iv)": Wir zeigen zunächst: Zu jedem Inhalt μ auf $P(E)$ gibt es genau eine positive Linearform α auf E mit der Eigenschaft $\mu = \alpha \circ \delta$.

Wir setzen $A := P(E)$ und bezeichnen mit μ die Stone-Darstellung von A . Zu dem Inhalt μ auf A gibt es eine eindeutig bestimmte positive Linearform α' auf $S(A)$ mit der Eigenschaft $\alpha'(\chi_{\varphi x}) = \mu(x)$, $x \in A$, und jede positive Linearform auf $S(A)$ läßt sich zu einer positiven Linearform auf $L^\infty(A)$ fortsetzen (vgl. [FR1], 42C, 44Ca)). Nach dem Darstellungssatz von Nakano (1.15) gibt es einen Riesz-Teilraum $\hat{E}$ von $L^\infty(A)$ und einen Riesz-Isomorphismus

$\hat{\Phi} : E \rightarrow \hat{E}$ mit der Eigenschaft

$$(+)\quad \hat{\Phi}(\delta(x)) = \chi_{\mu x}, \quad x \in A$$

(die Inklusion $E \subset L^\infty(A)$ folgt aus der Tatsache, daß e eine starke Einheit ist). Nun ist $\alpha := \alpha' \circ \hat{\Phi}$ eine positive Linearform auf E , und sie erfüllt für $x \in A$:

$$\alpha \circ \delta(x) = \alpha' \circ \hat{\Phi} \circ \delta(x) = \alpha'(\chi_{\mu x}) = \mu(x).$$

Wegen (+) ist $S(A) \subset E$, und daher ist α eindeutig bestimmt.

Nun sei R die Familie derjenigen Riesz-Seminormen ϱ auf E , welche auf E^+ additiv sind und für welche $\varrho \circ \delta$ stetig bezüglich τ ist, und sei T die von R erzeugte Topologie auf E . Gemäß 3.18 ist T lokal-konvex und lokal-konkav, und $\delta^{-1}(T)$ ist gröber als τ . Ist U eine σ -Umgebung für τ , so gibt es nach Voraussetzung einen τ -stetigen Inhalt μ auf A mit $\{x \in A : \mu(x) < 1\} \subset U$. Nach obiger Behauptung gibt es eine positive Linearform α auf E mit $\mu = \alpha \circ \delta$. Die Menge $V := \{f \in E : \alpha(|f|) < 1\}$ ist dann eine T - σ -Umgebung mit der Eigenschaft $\delta^{-1}(V) \subset U$. Dies zeigt, daß $\delta^{-1}(T)$ auch feiner als τ ist, also $T \in \mathcal{T}(\tau)$.

b) Ist T eine lokal-konvexe Topologie in $\mathcal{T}(\tau)$, so ist nach 2.14a) $\mathcal{T}(\tau) = \langle T \rangle$, und $T^\infty(\tau)$ ist daher die feinste Topologie in $\langle T \rangle$. Die Behauptung folgt daher aus der Beschreibung dieser Topologie in 2.17.

c) Es sei T eine hausdorff'sche, lokal-konvexe Topologie in $\mathcal{T}(\tau)$, und es sei R die Familie derjenigen T -stetigen Riesz-Seminormen, die auf E^+ additiv sind. Nach dem Satz von Hahn-Banach trennt E' die Punkte von E , und da T lokal-solid ist, ist jede stetige Linearform die Differenz von zwei positiven stetigen Linearformen ([FR1], 22D). Dies hat zur Folge, daß auch R die Punkte von E trennt. Die Familie $\{\varphi \circ \delta: \varphi \in R\}$ ist dann eine Familie von τ -stetigen Inhalten auf $P(E)$, welche die Punkte trennt, und die von ihr erzeugte Topologie σ ist hausdorff'sch und größer als τ .

[

3.21. Satz

E besitze die Projektionseigenschaft. Wir betrachten folgende Eigenschaften von E :

- a) $P(E)$ läßt ein strikt positives, semi-finites Maß zu.
- b) E läßt eine lokal-konkave L -Topologie zu.
- c) E läßt eine lokal-konvexe L -Topologie zu.

Es gilt $a) \iff b) \iff c)$, aber nicht $b) \implies c)$. Falls E eine starke Einheit besitzt, so sind alle drei Eigenschaften äquivalent.

Beweis

1. Wir setzen zunächst voraus, daß E eine starke Einheit e besitzt, und definieren $\delta : P(E) \rightarrow E$ wie in 2.4.

"a) $\Rightarrow$ b),c)": Wir setzen voraus, daß $P(E)$ ein strikt positives, semi-finites Maß trägt. Dann trägt $P(E)$ nach 3.11 eine L-Topologie τ , welche durch Inhalte erzeugt wird. Nach 2.16c) sind alle Topologien in $\mathcal{T}(\tau)$ L-Topologien, und nach 3.20a) gibt es darunter eine, welche lokal-konvex und lokal-konkav ist.

"b) $\Rightarrow$ a)": Wir setzen die Existenz einer lokal-konkaven L-Topologie T auf E voraus. Nach 2.10 ist $\delta^{-1}(T)$ eine L-Topologie auf $P(E)$, und nach 3.20a) wird sie durch Inhalte erzeugt. Nach 3.11 gibt es dann ein strikt positives, semi-finites Maß auf $P(E)$.

"c) $\Rightarrow$ a)" Wir setzen die Existenz einer lokal-konvexen L-Topologie T auf E voraus. Nach 3.20c) gibt es eine hausdorff'sche, lineare, lokal-solide Topologie auf $P(E)$, welche durch Inhalte erzeugt wird und gröber als die L-Topologie $\delta^{-1}(T)$ und damit selbst eine L-Topologie ist (nach 2.38a) stimmt sie dann sogar mit $\delta^{-1}(T)$ überein). Die Behauptung folgt dann wieder mit 3.11.

2. Wir nehmen nun an, daß E eine schwache Einheit e besitzt und definieren δ wieder wie in 2.4.

"a) $\Rightarrow$ b)": Wir setzen $F := \langle e \rangle$, dann sind offenbar die Boole'schen Algebren $F(E)$ und $F(F)$ isomorph, und nach

dem unter 1. gezeigten trägt F eine lokal-konkave L -Topologie S . Wir benutzen die Abbildung

$$\kappa : E \ni f \mapsto (f \wedge e) \vee (-e) \in F.$$

Ist $\mathcal{U}$ eine S - O -Umgebungsbasis aus konkaven Mengen, so ist die Familie $\mathcal{V} := \{ \kappa^{-1}(U) : U \in \mathcal{U} \}$ eine Filterbasis aus soliden Mengen, so daß es zu jeder $V \in \mathcal{V}$ ein $V_1 \in \mathcal{V}$ gibt mit $V_1 + V_1 \subset V$ (vgl. den Beweis von 2.15b)). $\mathcal{V}$ ist daher O -Umgebungsbasis einer Topologie T auf E , so daß (E, T) eine topologische Gruppe ist, und T ist lokal-solid. Die Abbildung κ ist ordnungs-stetig (vgl. 0.4a)), und daher ist T Lebesgue'sch. Dies hat (weil F archimedisch ist) zur Folge, daß alle $V \in \mathcal{V}$ absorbierend sind, und somit ist T eine lineare Topologie. Sie ist offenbar hausdorff'sch, also eine L -Topologie. Die Abbildung κ ist "konkav", d.h. aus $f, g \in E^+$, $0 < r < 1$ folgt

$$\kappa(rf + (1-r)g) \geq r \kappa(f) + (1-r) \kappa(g)$$

(vgl. den Beweis von 3.19). Daher sind alle $V \in \mathcal{V}$ konkav, und T ist lokal-konkav.

"b) oder c) $\Rightarrow$ a)": Dies folgt sofort aus dem unter 1. gezeigten, da die Spur auf $F := \langle e \rangle$ einer lokal-konkaven (bzw. lokal-konvexen) L -Topologie auf E ebenfalls eine lokal-konkave (bzw. lokal-konvexe) L -Topologie auf F ist, und da die Boole'schen Algebren $P(E)$ und $P(F)$ isomorph sind.

3. Wir machen nur keine einschränkenden Annahmen über E .

"a) $\Rightarrow$ b)": Nach 1.8b) sind die Boole'schen Algebren $P(E)$

und $F(L^0(P(E)))$ isomorph. Nach dem unter 2. gezeigten trägt $L^0(P(E))$ eine lokal-konkave L-Topologie T . Die Ogasawara-Maeda-Darstellung (1.18) liefert eine ordnungsstetige Riesz-Einbettung $\overset{T}{\mathbb{J}} : E \rightarrow L^0(P(E))$. Die Topologie $\overset{T}{\mathbb{J}}^{-1}(T)$ ist dann eine lokal-konkave L-Topologie auf E .

"b) oder c) $\Rightarrow$ a)": Wir zeigen, daß die Familie aller ordnungsstetigen Inhalte auf $P(E)$ die Punkte trennt; die Behauptung folgt dann aus 3.11.

Dazu sei $0 \neq x \in P(E)$ gegeben (zur Terminologie vgl. 2.2). Wir wählen ein beliebiges Element $0 < e \in x$ und setzen $y := [e]$. Nach dem unter 2. gezeigten trägt $P(y)$ ein strikt positives, semi-finites Maß, nach 3.11 also auch einen nicht-trivialen ordnungsstetigen Inhalt $\bar{\nu}$. Dieser läßt sich vermöge

$$\bar{\nu}(z) := \nu(y \sqcap z), \quad z \in P(E)$$

zu einem ordnungsstetigen Inhalt auf $P(E)$ fortsetzen, und es gilt $\bar{\nu}(x) = \nu(x \sqcap y) = \nu(y) > 0$. Damit ist gezeigt, daß die Familie aller ordnungsstetigen Inhalte auf $P(E)$ die Punkte trennt.

4. Es bleibt noch zu zeigen, daß im allgemeinen nicht $a) \Rightarrow c)$ gilt. Dafür diene das Beispiel $L^0(\mu)$ mit endlichem Maß μ (3.16). Die dort angegebene Topologie ist im allgemeinen nicht lokal-konvex (vgl. [WE], 4.17), und sie ist die einzige L-Topologie auf $L^0(\mu)$ (2.37b)). Aber $P(L^0(\mu))$ ist zur Maßalgebra von μ isomorph, trägt also ein strikt positives, endliches Maß.

3.22 Definition

E heißt stark ordnungs-separabel, wenn jede disjunkte Familie in E höchstens abzählbar ist.

E ist ordnungs-separabel, wenn jede ordnungs-beschränkte disjunkte Familie höchstens abzählbar ist ($[LZ]$, Thm. 29.3). Obige Eigenschaft ist also in der Tat stärker.

3.23 Korollar

E besitze die Projektionseigenschaft. Wir betrachten folgende Aussagen über E:

- a) $P(E)$ trägt ein strikt positives, endliches Maß.
- b) E trägt eine lokal-konkave L-Topologie und ist stark ordnungs-separabel.
- c) E trägt eine lokal-konvexe L-Topologie und ist stark ordnungs-separabel.

Es gilt: a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c).

Beweis

Trägt $P(E)$ ein strikt positives, endliches Maß, so ist $P(E)$ ordnungs-separabel, und dann ist E stark ordnungs-separabel. "a) $\Rightarrow$ b)" folgt damit aus 3.21.

Ist E stark ordnungs-separabel, so ist $P(E)$ ordnungs-separabel. Ist b) oder c) erfüllt, so trägt $P(E)$ nach 3.21 ein strikt positives, semi-finites Maß μ . Mit dem Lemma von Zorn erhält man eine maximale disjunkte Familie $(x_i: i \in I)$ in $P(E)$, so daß $\mu(x_i) < \infty$ für $i \in I$ gilt. Dann muß $\sup \{x_i: i \in I\} = 1$ sein, und I ist höchstens abzählbar: $I = \{i_n: n \in \mathbb{N}\}$. Dann wird

$$\text{durch} \quad \mu(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu(x_{i_n})} \mu(x \wedge x_{i_n}), \quad x \in P(E),$$

ein strikt positives, endliches Maß definiert.

Wir kommen nun zu dem wichtigsten Ergebnis dieser Arbeit. Zu seiner Formulierung benötigen wir noch zwei Definitionen.

3.24 Definition

Ein Riesz-Teilraum F von E heißt projektions-abgeschlossen, wenn aus $f \in F$ und $x \in P(E)$ stets folgt $P(x, f) \in F$.

Dieser Begriff wird z.B. bei [B0] verwendet. Besitzt E die Projektionseigenschaft, und ist F in E ordnungs-dicht, so ist F genau dann projektions-abgeschlossen in E , wenn F selbst die Projektionseigenschaft besitzt.

3.25 Definition

Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Das Maß μ heißt lokalisierbar, wenn die Maßalgebra von μ (d.h. die Boole'sche Algebra der μ -Äquivalenzklassen Σ -meßbarer Mengen) eine vollständige Boole'sche Algebra ist.

3.26 Satz

a) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, μ sei semi-finit und lokalisierbar, und E sei ein projektions-abgeschlossener Riesz-Teilraum von $L^0(\mu)$. Dann gilt:

- i) E besitzt die Projektionseigenschaft.
- ii) E trägt eine lokal-konkave L -Topologie.

Ist E sogar ein Ideal in $L^0(\mu)$, so ist E Dedekind-vollständig. Ist μ endlich, so ist E stark ordnungs-separabel.

b) Es sei E ein Riesz'scher Raum mit der Projektionseigenschaft, welcher eine lokal-konkave (oder eine lokal-konvexe) L -Topologie zuläßt. Es sei

$$\psi : P(E) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$$

die Stone-Darstellung der Boole'schen Algebra $P(E)$, und es sei Σ die σ -Algebra der Baire-Mengen auf Ω .

Dann gibt es ein semi-finites, lokalisierbares Maß μ auf Σ , einen projektions-abgeschlossenen, ordnungs-dichten Riesz-Teilraum $\hat{E}$ von $L^0(\mu)$, und einen Riesz-Isomorphismus $\Phi: E \rightarrow \hat{E}$.

Ist E Dedekind-vollständig, so ist $\hat{E}$ sogar ein Ideal in $L^0(\mu)$.

Besitzt E eine schwache Einheit e , so kann man $\hat{E}$ und Φ so wählen, daß gilt: $\Phi(e) = \bar{1}_\Omega$.

Ist E stark ordnungs-separabel, so kann man μ endlich wählen.

Beweis

a) Da $P(L^0(\mu))$ zur Maßalgebra von μ isomorph ist, ist $P(L^0(\mu))$ vollständig. Da der Raum $L^0(\mu)$ offenbar Dedekind- σ -vollständig ist, ist er daher sogar Dedekind-vollständig (s. 0.4d)). Nach der Bemerkung im Anschluß an 3.24 besitzt E die Projektionseigenschaft, und E ist Dedekind-vollständig, wenn E ein Ideal in $L^0(\mu)$ ist. Der Rest der Behauptung folgt nun sofort aus 3.21 und 3.23.

b) Die Boole'sche Algebra $P(E)$ ist vollständig (vgl. 0.4c)). Nach 3.21 gibt es ein strikt positives, semi-finites Maß μ auf $P(E)$. Dieses überträgt sich mittels der Stone-Darstellung in natürlicher Weise zu einem semi-finiten

Maß μ auf Σ , dessen Nullmengensystem gerade das σ -Ideal Σ_0 der mageren Baire-Mengen ist (vgl. [FR1], 61I), und μ ist lokalisierbar, weil die Maßalgebra von μ zu $P(E)$ isomorph ist. Nun stimmt offenbar der Raum $L^0(\mu)$ mit dem in 1.7 konstruierten Raum $L^0(P(E))$ überein. Der Satz von Ogasawara-Maeda (1.18) liefert nun einen ordnungs-dichten Riesz-Teilraum $\hat{E}$ von $L^0(\mu)$ und einen Riesz-Isomorphismus $\hat{\Phi}: E \rightarrow \hat{E}$. Mit E besitzt auch $\hat{E}$ die Projektionseigenschaft, und nach der Bemerkung im Anschluß an 3.24 ist $\hat{E}$ projektions-abgeschlossen in $L^0(\mu)$. Die restlichen Aussagen folgen nun aus 3.23 bzw. den weiteren Aussagen in 1.18.

□

§ 4. Beispiele und Ergänzungen

4.1 Vereinbarung

In diesem Paragraphen bezeichne E einen Riesz'schen Raum, T_0 bezeichne die Ordnungstopologie und T_{s0} die Ordnungsfolgentopologie auf E .

A. Riesz'sche Räume ohne die Diagonaleigenschaft

Läßt E eine vollständig metrisierbare L -Topologie zu, so besitzt E die Diagonaleigenschaft (vgl. [WE], 2.12b) und [FR1], 25L). Dies ist die wichtigste hinreichende Bedingung für die Diagonaleigenschaft, sie gestattet für viele in der Maßtheorie vorkommende Räume den Nachweis der Diagonaleigenschaft. Wir geben hier zwei notwendige Bedingungen für die Diagonaleigenschaft an und erhalten damit Beispiele für Räume, welche nicht die Diagonaleigenschaft besitzen.

4.2 Satz

E sei archimedisch und besitze die Diagonaleigenschaft, $(E_n)_n$ sei eine Folge echter Ideale in E . Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq E$.

Beweis

Die Diagonaleigenschaft zusammen mit der Archimedizität von E gewährleistet die folgende Eigenschaft von E :

(+) Zu jeder Folge $(f_n)_n$ in E^+ gibt es eine Folge $(r_n)_n$ in $\mathbb{R}$ mit $0 < r_n$, $n \in \mathbb{N}$, so daß die Folge $(r_n f_n)_n$ in E ordnungsbeschränkt ist.

(zum Beweis vgl. LZ, Thm.70.2)

Nach Voraussetzung gibt es eine Folge $(f_n)_n$ in E^+ , so daß für $n \in \mathbb{N}$ $f_n \notin E_n$ gilt. Wählen wir $(r_n)_n$ gemäß (+), und ist $g \in E$ eine obere Schranke für die Folge $(r_n f_n)_n$, so ist $g \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

4.3 Korollar

Es sei μ ein endliches Maß so daß $L^0(\mu) \neq L^1(\mu)$ ist, und sei $0 \leq q < \lambda$. Dann besitzt der Riesz'sche Raum

$E := \bigcup_{p>q} L^p(\mu)$ nicht die Diagonaleigenschaft.

Wir zeigen nun noch, daß auf Räumen dieses Typs die Topologien T_0 und T_{S_0} nicht metrisierbar sind.

4.4 Lemma

Es sei F ein reeller Vektorraum, $(F_n)_n$ sei eine strikt aufsteigende Folge linearer Teilräume von F mit $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei T_n eine Topologie auf F_n , so daß die Translationen stetig, die 0-Umgebungen absorbierend und die einpunktigen Mengen abgeschlossen sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Spur von T_{n+1} auf F_n gröber als T_n . Es sei T die induktive Limestopologie der T_n auf F .

Dann erfüllt T nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis

Wir nehmen an, es gäbe eine abzählbare 0-Umgebungsbasis $(U_n)_n$ für T . Wir setzen noch $F_0 := \{0\}$ und wählen eine Folge $(f_n)_n$ in F mit $f_n \in F_n \setminus F_{n-1}$, $f_n \in U_n$ für $n \in \mathbb{N}$; dies ist auf Grund der Voraussetzungen offenbar möglich. Die Menge $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist T -abgeschlossen, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $A \setminus F_n$ endlich, also T_n -abgeschlossen. Daher ist $U := F \setminus A$ eine T -0-Umgebung, welche keines der U_n umfaßt. Widerspruch. $\square$

4.5 Satz

E sei ein Riesz'scher Raum, welcher eine strikt aufsteigende Folge $(E_n)_n$ von Idealen mit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ enthält.

Dann erfüllen die Topologien T_0 und T_{SO} nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom, sind also insbesondere nicht metrisierbar.

Beweis

Wir bezeichnen mit $T_{SO}^{(n)}$ die Ordnungsfolgentopologie auf E_n . Eine Folge in E ist offenbar genau dann ordnungskonvergent, wenn sie ganz in einem der E_n liegt und dort ordnungskonvergent ist; anders ausgedrückt: T_{SO} ist die induktive Limestopologie der $T_{SO}^{(n)}$. Die Behauptung über T_{SO} folgt also direkt aus 4.4. Ganz analog beweist man die Behauptung über T_0 . $\square$

4.6 Satz

E sei archimedisch und besitze die Diagonaleigenschaft. Dann ist die Familie aller soliden, absorbierenden Teilmengen von E eine 0-Umgebungsbasis für T_{SO} .

Beweis

Die Voraussetzungen über E garantieren, daß jede ordnungskonvergente Folge in E sogar relativ-gleichmäßig konvergiert (vgl. LZ, Thm.10.9). Ist nun U eine solide, absorbierende Teilmenge von E , und ist $(f_n)_n$ eine gegen 0 ordnungskonvergente Folge in E , so gibt es ein $g \in E^+$ und eine Folge $(r_n)_n$ in $\mathbb{R}$ mit $r_n \downarrow 0$ und $|f_n| \leq r_n g$ für $n \in \mathbb{N}$. Da U absorbierend ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq n_0$ gilt $r_n g \in U$; da U solid ist, gilt für solche n auch $f_n \in U$. Da E die Diagonaleigenschaft besitzt, reicht dies für den Nachweis aus, daß U eine 0 -Umgebung für T_{so} ist.

Andererseits hat die Diagonaleigenschaft zur Folge, daß T_{so} lokal-solid ist (s. [WE], 2.5). Jede 0 -Umgebung umfaßt also eine solide 0 -Umgebung, und eine solche ist absorbierend. $\square$

Diese überraschend einfache Beschreibung von T_{so} ergibt sofort:

4.7 Korollar

E sei archimedisch, ordnungs-separabel, und besitze die Diagonaleigenschaft. Dann ist jede lineare und lokal-solid Topologie auf E Lebesgue'sch.

Beweis

Wegen 4.6 ist eine solche Topologie offenbar gröber als T_{so} , und da E ordnungs-separabel ist, ist $T_{so} = T_0$. $\square$

Man beachte, daß aus der Diagonaleigenschaft schon die Ordnungs-Separabilität folgt, wenn die Kontinuumshypothese vorausgesetzt ist (vgl. 2.41a)). Man beachte auch, daß

(zumindest innerhalb der ZFC-Mengenlehre) aus der Diagonaleigenschaft und der Ordnungsseparabilität von E nicht die Existenz einer linearen, lokal-soliden, hausdorff'schen Topologie auf E folgt (vgl. 2.41b)).

4.8 Korollar

Es sei μ ein endliches, nicht rein atomares Maß, und $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sei eine gerade, stetige, konvexe Funktion mit den Eigenschaften

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r)}{r} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r} = \infty ,$$

und es sei E der durch φ definierte Orlicz-Raum L_{φ}^* .

Genau dann besitzt E die Diagonaleigenschaft, wenn φ der Bedingung " Δ_2 " genügt:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(2r)}{\varphi(r)} < \infty .$$

Beweis

Zur Theorie der Orlicz-Räume vergleiche man etwa [KR]. Dort wird gezeigt: die Bedingung " Δ_2 " ist äquivalent dazu, daß die Normtopologie auf E Lebesgue'sch ist ([KR], § 10). Ist also Δ_2 erfüllt, so folgt die Diagonaleigenschaft aus der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnitts. Ist sie verletzt, so muß nach 4.7 auch die Diagonaleigenschaft verletzt sein, denn die Normtopologie ist linear und lokal-solid, und E ist archimedisch und ordnungs-separabel.

Es sei angemerkt, daß Orlicz-Räume auch für nicht-konvexe φ erklärt werden können, und daß 4.8 dann ebenso gilt.

B. Inhalte auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und Solovay's Modell

Wir bezeichnen mit DC das "Axiom of dependent choice", und mit I die Aussage "Es gibt eine unerreichbare Kardinalzahl". Solovay beweist in $[SO^-]$:

Gibt es ein transitives ε -Modell von ZFC + I, so gibt es auch ein transitives ε -Modell von ZF + DC, in welchem (u.a.) folgende Aussagen wahr sind:

- i) Jede Menge reeller Zahlen ist Lebesgue-meßbar.
- ii) Jede Menge reeller Zahlen besitzt die Baire'sche Eigenschaft¹⁾.

In diesem Zusammenhang ist der folgende Satz von Christensen interessant, auf den mich Herr Dr. H. von Weizsäcker aufmerksam gemacht hat:

4.9 Satz (Christensen)

Es sei A die Boole'sche Algebra $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mu: A \rightarrow \mathbb{R}^+$ ein Inhalt auf A , welcher meßbar ist bezüglich der σ -Algebra der Mengen mit der Baire'schen Eigenschaft auf A . Dann ist μ σ -ordnungs-stetig.

Beweis

(s. [CH].) Wir merken an, daß der Beweis in ZF + DC geführt werden kann.

¹⁾ Eine Teilmenge B eines topologischen Raumes Ω hat die Baire'sche Eigenschaft, wenn es eine offene Menge C gibt, so daß $(B \setminus C) \cap (C \setminus B)$ mager ist.

Wie man leicht einsieht, ist in Solovay's Modell jede Teilmenge von $A := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ meßbar sowohl bezüglich des Haar-Maßes auf A wie bezüglich der σ -Algebra der Mengen mit der Baire'schen Eigenschaft. Das letztere hat vermöge 4.9 zur Folge, daß jeder Inhalt auf A σ -ordnungs-stetig ist, und dann gilt, wie man leicht einsieht, sogar der folgende Satz:

4.10 Satz

In Solovay's Modell ist jeder Inhalt auf einer beliebigen Boole'schen σ -Algebra bereits σ -ordnungs-stetig. □

Wie von Christensen selbst bemerkt wird, ist die Aussage seines Satzes falsch, wenn man die dortige Meßbarkeits-Voraussetzung durch die Voraussetzung der Meßbarkeit bezüglich des Haar-Maßes auf A ersetzt. Immerhin läßt sich seine Beweismethode abwandeln, um folgende Aussage zu erhalten:

4.11 Satz

Es sei A die Boole'sche Algebra $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und T die Produkttopologie der diskreten Topologie auf $\{0,1\}$, und λ sei das Haar'sche Maß auf der kompakten abel'schen Gruppe (A, Δ, T) . Ist $\mu: A \rightarrow \mathbb{R}^+$ ein λ -meßbarer, rein endlich additiver¹⁾ Inhalt, so ist $\lambda(\{x \in A: \mu(x) = \frac{1}{2}\mu(1)\}) = 1$.

Beweis

Wir nehmen o.E. $\mu(1) = 1$ an. Wir setzen

$$B := \{x \in A: \mu(x) < \frac{1}{2}\}$$

1) μ heißt rein endlich additiv, wenn für jeden σ -additiven Inhalt ν aus $\mu \leq \nu$ folgt $\mu = 0$.

Wir führen die Annahme $\lambda(B) > 0$ zum Widerspruch.

Nach einem bekannten Satz über das Haar'sche Maß (vgl. [HR], Cor. 20.17) folgt aus $\lambda(B) > 0$, daß die Menge $C := \{x \Delta y : x, y \in B\}$ eine 0-Umgebung ist. Daher gibt es ein $z \in C$, welches die Gestalt

$$z(i) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \leq n \\ 1 & \text{für } i > n \end{cases} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}$$

hat. Nach Definition von C gibt es $x, y \in B$ mit $z = x \Delta y$.

Da μ rein endlich additiv ist, muß $\mu(z) = 1$ sein. Wir haben $(x \Delta y) \wedge (x \wedge y) = 0$, und die Additivität von μ ergibt $\mu(x \wedge y) \leq 1 - \mu(x \Delta y) = 0$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} 1 = \mu(x \Delta y) &= \mu(x \vee y) - \mu(x \wedge y) \\ &= \mu(x) + \mu(y) - 2\mu(x \wedge y) \\ &= \mu(x) + \mu(y) \\ &> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

einen offensichtlichen Widerspruch.

Nun ist also $\lambda(B) = 0$, und da λ invariant ist, gilt auch

$$\lambda(\{y \in A : \mu(y) < \frac{1}{2}\}) = \lambda(B \Delta 1) = \lambda(B) = 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

□

Stichwortverzeichnis

	Seite
archimedisch	14
Band	
in einer Boole'schen Algebra	11
in einem Riesz'schen Raum	13
Dedekind-($\sup$ -)vollständig	8
Diagonaleigenschaft	9
Differenz, symmetrische	11
disjunkte Menge, Folge	
in einer Boole'schen Algebra	11
in einem Riesz'schen Raum	13
Einheit; starke, schwache	13
erzeugte Topologie	54
Fatou-	
sche Topologie	36
Pseudo-Norm	52
Sub-Inhalt	53
Haupt-	
Band	13
Ideal	13
Projektionseigenschaft	14
Homomorphismus	
Boole'scher	11
Riesz-	14
Verbands-	10

Ideal	
in einer Boole'schen Algebra	11
in einem Riesz'schen Raum	13
Infimum	8
Inhalt	71
invariante Topologie	36
isoton	9
-abgeschlossen	8
Kern, solider	56
konfinal	8
konkav	81
Konvergenz	
gleichmäßige	13
relativ-gleichmäßige	14
Ordnungs-, von Folgen und Filtern	9
Lebesgue'sch	36
lineare Topologie	36
lokalisierbar	94
lokal-konkav	81
lokal-solid	36
L-Topologie	61
Maß	78
Ordnungs-	
dicht	13
Isomorphismus	10
separabel	9
(σ -)stetig	10
(Folgen-)Topologie	9

Projektions-	
abgeschlossen	94
Band	13
Eigenschaft	14
Operator	15
pseudo-Lebesgue'sch	69
Riesz-	
Pseudo-Norm	52
Semi-Norm	85
Teilraum	13
semi-finit	78
solide Menge	
in einer Boole'schen Algebra	11
in einem Riesz'schen Raum	13
stark ordnungs-separabel	93
Stone-Darstellung	12
strikt positiv	
-er Sub-Inhalt	63
-es Maß	78
Sub-Inhalt	53
super-ordnungs-dicht	13
Supremum	8
Teilverband	8
universal-(, -)vollständig	14
Unteralgebra	11
vollständig, σ -vollständig	8
ZFC-Mengenlehre	7

Symbolverzeichnis

	Seite
$\mathcal{P}(A)$	7
$c(A)$	
$B \setminus A$	
χ_A	
$\mathbb{N}$	
$\mathbb{R}$	
$\widetilde{\mathbb{R}}$	
$\bar{A}$	
$co(A)$	
$\leq$	8
$\wedge$	
$\vee$	
$[a, b]$	
$\uparrow, \downarrow$	
$\mathcal{F}(A\uparrow), \mathcal{F}(A\downarrow)$	
$\xrightarrow{o}$	9
$o, l, '$	10
$\triangle$	11
E^+	12
$f^+, f^-, f $	13
$\langle A \rangle$	
$[A]$	
A^d	
$\xrightarrow{e}$	

$B(E), P(E)$	14
$P(\mathbf{x}, f)$	15
$S(A)$	16
$L^\infty(A)$	17
$L^0(A)$	19
$C^{0,1}(\Omega)$	22
$\sqsubseteq, \sqsupset, \sqsubset, \sqsupseteq$	29
T_o, τ_o	33; 52
$\gamma(\tau)$	41
$\widetilde{H}, \widetilde{e}, \sim$	
$\langle T \rangle_H, \langle T \rangle_e, \langle T \rangle$	
$T(R)$	54
$\tau(L)$	
$sk(U)$	56
$L^p(\mu)$	82

Literaturverzeichnis

- [AM] I. Amemiya, T. Mori:
Topological Structures in Ordered Linear Spaces
J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), S. 131
- BO] A.S. Bondarev:
On Certain Completions of K-Lineals
Siber. Math. J. 15 (3) (1974), S. 339
- [CH] J.P.R. Christensen:
Borel-Structures and a Topological 0-1-Law
Papers from the "Open House of Probabilists" 1971,
S. 32
- [DE] K.J. Devlin, H. Johnsraten:
The Souslin Problem
Lecture Notes in Math. 405
- [FL] E.E. Floyd:
Boolean Algebras with Pathological Order Topologies
Pac. J. Math. 5 (1955), S. 687
- [FR1] D.H. Fremlin:
Topological Riesz Spaces and Measure Theory
Cambridge 1974
- [FR2] Abstract Koethe Spaces II
Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967), S. 951
- [FR3] Riesz Spaces with the Order Continuity Property
(unveröffentlicht)
- [FR4] Inextensible Riesz Spaces
Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1) (1975), S. 71
- [FR5] Notes on Martin's Axiom
(unveröffentlicht)
- [FR6] A Characterization of L-Spaces
Indag. Math. 36 (1974), S. 270

- HA P.R. Halmos:
Lectures on Boolean Algebras
Van Nostrand 1963
- HC W. Herer, J.P.R. Christensen:
On the Existence of Pathological Submeasures and
the Construction of Exotic Topological Groups
Math. Ann. 312 (1975), S. 203
- HR E. Hewitt, A. Ross:
Abstract Harmonic Analysis
Springer 1963
- JE T.J. Jech:
Lectures on Set Theory, with particular Emphasis on
the Method of Forcing
Lecture Notes in Math. 217
- KAK S. Kakutani:
Concrete Representation of AL-Spaces and Mean
Ergodic Theorem
Ann. Math. (2) 42 (1941), S. 523
- KAN L.V. Kantorovich, B.Z. Vulikh, A.G. Pinsker:
Funktionalanalysis in halbgeordneten Räumen
(1950)
- KE J.L. Kelley:
Measures on Boolean Algebras
Pac. J. Math. 9 (1959), S. 1165
- KR M.A. Krasnosel'skii, A.B. Rutickii:
Convex Functions and Orlicz Spaces
Groningen 1961
W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen:
Riesz Spaces I
North Holland P.C. 1971
- MAH D. Maharam:
An Algebraic Characterization of Measure Algebras
Ann. Math. 48 (1947), S. 154
- MAS J.J. Masterson:
A Characterization of the Riesz Space of Measurable
Functions
Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969), S. 193

- NA H. Nakano:
Modern Spectral Theory
Tokyo 1950
- SA T.A. Sarymsakov, B.A. Rubstein, V.I. Cilin:
Complete Tensor Products of Topological Semifields
Soviet Math. Dokl. 15 (3) (1974), S. 969
- SIK R. Sikorski:
Boolean Algebras
Springer 1969
- SO R.M. Solovay:
A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals is
Lebesgue Measurable
Ann. Math. (2) 92 (1970), S.1
- VO Vo-Khac Khan:
Treillis de Freudenthal et theoreme de Kakutani-
Nakano concernant la class L^p
Compte Rendus Paris 279 (1974), S. 495
- VU B.Z. Vulikh:
Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces
Groningen 1967
- WA L. Waelbroeck:
Topological Vector Spaces and Algebras
Lecture Notes in Math. 230
- WE H.v. Weizsäcker:
Vektorverbände und meßbare Funktionen
Dissertation München 1972
- WL1 D.A. Wladimirow:
Boole'sche Algebren
Berlin 1972
- WL2 Über die Vollständigkeit eines halbgeordneten Raumes
Fortschr. Math. 15 (2) (92) (1960), S. 165

Lebenslauf

Geburtsdatum: 23. Juli 1947

Geburtsort: Langen (Hessen)

Schulbildung:

April 1954 - April 1958 Volksschule in Langen

April 1958 - Oktober 1966 Gymnasium in Langen

Studium:

SS 1968 - WS 1969/70 J.W.Goethe-Universität Frankfurt

SS 1970 - WS 1975/76 L.Maximilians-Universität München

Abschlußprüfungen:

Oktober 1966 Abitur

August 1973 Diplom-Prüfung Mathematik

Februar 1977 Doktor-Prüfung Mathematik

Berufliche Tätigkeiten:

Seit Februar 1976 Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Volkswirtschaftlichen Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München.

Dissertationsdruck
GmbH & Co. KG.

M. SCHADEL

86 Bamberg · Hohe-Kreuz-Str. 9b · Tel. 0951/21617(5 44 141)